Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2015-2016 уч.г.
Задания заключительного (очного) этапа
Математика
8 класс

Задание 1. (20 баллов)
На доске записано 30 чисел: 1, 2, …, 30. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать числа $a + 2b$ и $b + 2a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций на доске будут записаны 30 одинаковых чисел?
Решение
При указанном преобразовании сумма пары чисел увеличивается на $(a + 2b) + (b + 2a) – (a + b) = 2(a + b)$, то есть на четное число. Сумма всех исходных чисел равна 465. На каждом шаге она меняется на четное число, следовательно остается нечетной. Поэтому получиться 30 одинаковых чисел не может.

Задание 2. (20 баллов)
Докажите, что число $2^{10}+5^{16}$ является составным.
Решение
$2^{10}+5^{16} = (5^8 + 32)^2 – (2^3\cdot 5^4)^2$

Задание 3. (20 баллов)
Три стороны четырёхугольника в порядке обхода равны 7, 1 и 4. Найдите четвёртую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.
Решение
(**Подсказка: е**сли диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то суммы квадратов его противоположных сторон равны).
Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке P; $AB = 7$, $BC = 1$, $CD = 4$. По теореме Пифагора

$$AB^2 - AP^2 = BC^2 - CP^2, \text{ или } AB^2 - BC^2 = AP^2 - CP^2.$$

Аналогично докажем, что

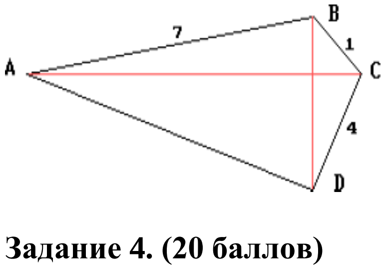
$$AD^2 - CD^2 = AP^2 - CP^2.$$

Следовательно,

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2, \text{ или } AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Отсюда находим, что

$$AD^2 = AB^2 + CD^2 - BC^2 = 49 + 16 - 1 = 64,\ AD = 8.$$



Задание 4. (20 баллов)
Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$$

Решение

Ввиду неравенства треугольника $a^2 > (b - c)^2$. Отсюда $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$. Следовательно, первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других. Поэтому их сумма больше 3.

Задание 5. (20 баллов)

Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Решение

Первый способ

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = ac,\ \ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Тогда $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ac}{ac + c^2} = \frac{a(a+c)}{c(a+c)} = \frac{a}{c}$.

Если $a + c = 0 \Leftrightarrow a = -c \Rightarrow b^2 = -c^2$. Противоречие.

Второй способ

Обозначим $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, k \neq 0$).

Тогда $a = kb, b = kc \Rightarrow a = k^2 c$. Подставим в левую часть равенства:

$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{k^4 c^2 + k^2 c^2}{k^2 c^2 + c^2} = \frac{k^2\left(k^2 c^2 + c^2\right)}{k^2 c^2 + c^2} = k^2$ и в правую часть равенства: $\frac{a}{c} = \frac{k^2 c}{c} = k^2$.

Так как получили равные выражения, то тождество верно.

Примечание. Если не рассмотрен случай $a + c = 0$*, то снимается 9 баллов.*