Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2015-2016 уч.г.
Задания заключительного (очного) этапа
Математика
10 класс

Задание 1. (20 баллов)
Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть граней в белый цвет, а оставшуюся часть – в черный.
Сколько существует различных способов окраски граней куба, если различными считаются такие окраски кубов, которые не совмещаются вращением.
Ответ: 10
Решение
Окраски граней куба естественно различаются по числу окрашенных граней в белый цвет.
Очевидно, имеется ровно один вариант окраски всех граней куба в белый цвет, и один вариант, когда нет ни одной белой грани.
Точно так же, очевидно, что имеется ровно один вариант окраски одной грани куба в белый цвет и один вариант окраски пяти граней в белый цвет (или одной грани в черный цвет).
Далее, существуют ровно две различные окраски, когда две грани куба окрашены в белый цвет.
Первый вариант, когда белые грани противоположные в кубе, второй, когда они смежные, т. е. имеют общее ребро.
Любая окраска куба, состоящая из двух белых граней, совмещается вращением с одной из них.
Действительно, совмещая белые грани двух таких кубов, окраски совпадут, если у них в белый цвет окрашены противоположные грани.
Если у них белые грани имеют общее ребро, то вращая один из них вокруг оси, перпендикулярной совмещенным граням, добьемся совпадения двух других белых граней.
Аналогично, имеется два варианта для четырех белых граней, или для двух черных граней.
Наконец, покажем, что и в случае трех белых граней имеется лишь два различных варианта окраски.
Действительно, разобьем все грани на три пары противоположны граней.
Тогда окраски различаются, если все три грани из разных пар (и тогда они имеют общую вершину), или две грани из одной пары, а одна из другой (тогда третья грань смежная двум граням из одной пары).
Итого имеется 1 + 1 + 2 +2 + 2 +1 + 1 = 10 различных окрасок граней куба.
Примечание. Отмечено, что число различных окрасок не меньше 7 -3 балла, не меньше 8 – 9 баллов, не меньше 9 – 15 баллов.

Задание 2. (20 баллов)
Точки K и L – середины сторон AB и BC четырехугольника $ABCD$.
На стороне CD выбрана такая точка M, что $CM : MD = 2 : 1$.
Известно, что $DK \parallel BM$ и $AL \parallel CD$.
Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.
Решение
Проведем через точку L прямую параллельную BM, и пусть она пересекает отрезок CM в точке N.
Так как L – середина BC, то, LN – средняя линия треугольника BCM, значит $CN = NM$.

По условию $CM : MD = 2 : 1$, следовательно $CN = NM = MD$.
Обозначим через E и F точки пересечения прямой AL с прямыми KD и BM соответственно.
KE – средняя линия в треугольнике ABF, поэтому $AE = EF$.
Далее, из того, что $LN \parallel FM \parallel ED$ и $NM = MD$ следует, согласно теореме Фалеса, равенство $LF = FE$.
Наконец, заметим, что четырехугольник $EFMD$ –параллелограмм, поэтому $FE = MD$.
Таким образом, $AL= 3EF = 3MD = CD$ и $AL \parallel CD$.
Следовательно, $ALCD$ – параллелограмм, и $AD\parallel BC$.
Учитывая, что $CD \parallel AL \nparallel AB$, то четырехугольник $ABCD$ – трапеция.
Примечание. Замечено, что пересечении прямых AL, DC, KD и BM - параллелограмм – 1 балл.

Задание 3. (20 баллов)
Шахматный турнир проходит в один круг, каждый участник играет с каждым другим один раз. В турнире участвовало два девятиклассника и некоторое число десятиклассников.
Два девятиклассника вместе набрали 8 очков, а каждый десятиклассник набрал одно и то же число очков.
Сколько десятиклассников участвовало в турнире?
(За победу в шахматной партии дается одно очко, за ничью – пол очка, за поражение – ноль очков).
Ответ: 7 или 14
Решение
Пусть в турнире участвовало n десятиклассников. Так как в каждой партии всего разыгрывается одно очко, то девятиклассники в игре между собой вместе набрали 1 очко, и, следовательно, 7 очков набрали в играх с десятиклассниками. Тогда все десятиклассники суммарно набрали $\frac{n(n-1)}{2}$ очков в играх между собой и $2n - 7$ очков в играх с двумя девятиклассниками. По условию, все десятиклассники набрали одинаковое число очков, то есть, число $\frac{n(n-1)}{2} + 2n - 7$ кратно n. Последнее означает, что число $\frac{n-1}{2} - \frac{7}{n}$ целое. Если n нечетно, то $(n - 1)$ – четно, и, следовательно, n *делит* 7, то есть $n = 1$ или $n = 7$. Значение $n = 1$ не подходит, так как общее число набранных очков десятиклассниками будет отрицательно. Пусть n четно, то есть $n = 2к$. Тогда $\frac{n-1}{2} - \frac{7}{n} = k - \frac{1}{2} - \frac{7}{2k}$. Следовательно, $\frac{1}{2} + \frac{7}{2k}$ целое, а значит $\frac{7}{2k} = m + \frac{1}{2}$, откуда $k = 1$ или $k = 7$. Действительно, при $k > 7$ $\frac{7}{2k} < \frac{1}{2}$, а значения $k \leq 7$ проверяются непосредственно. Значение $k = 1$ не подходит по тем же причинам, что и в первом случае. Таким образом, для n имеем два значения: 7 и 14. Проверкой легко убедиться, что оба значения подходят.
Примечание. Получен один ответ – 5 баллов.

Задание 4. (20 баллов)
Докажите, что для любых положительных чисел a, b выполняется неравенство:

$$a^6 + b^6 \leq \frac{a^9}{b^3} + \frac{b^9}{a^3}.$$

Решение
Сделаем замену $a^3 = x, b^3 = y$. Тогда неравенство примет вид:

$$x^2 + y^2 \leq \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \Leftrightarrow x^3y + xy^3 \leq x^4 + y^4.$$

Используем неравенство Коши:

$$x^3y = \sqrt{x^6y^2} \le \frac{x^4 + x^2y^2}{2}, xy^3 \le \frac{x^2y^2 + y^4}{2} \Rightarrow x^3y + xy^3 \le \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2}.$$

Ещё раз воспользуемся неравенством Коши:

$x^2y^2 \le \dfrac{x^4 + y^4}{2}$ и получим требуемое неравенство.

Задание 5. (20 баллов)

У Пети есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые 2 соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски всех трех цветов?

Решение

Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую — одной из двух оставшихся, третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски, и т. д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую – двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого 1536 - 6 = 1530 способов.

Ответ: 1530 способов