11 класс

Задание 1. Маленький упругий шарик бросают со скоростью υ = 1 м/с под углом α = 45° к горизонту. Коэффициент восстановления вертикальной составляющей скорости шарика после удара о горизонтальную плоскость, с которой производился бросок, k = 0,99. На каком расстоянии S от точки бросания шарик перестанет подпрыгивать, если горизонтальная составляющая его скорости не изменяется? (Коэффициентом восстановления называется отношение скорости после удара к скорости до удара).

Решение.

Между моментом броска шарика и его первым ударом о плоскость пройдет время

$$t_0 = \frac{2\upsilon \sin\alpha}{g}$$

После удара горизонтальная составляющая скорости шарика не изменится, а вертикальная станет равной R·υ. Значит, между первым и вторым ударами шарика о плоскость пройдет время

$$t_0 = \frac{2R\upsilon \sin\alpha}{g}$$

Рассуждая аналогично, получим, что между n-м и (n + 1)-м ударами пройдет время

$$t_0 = \frac{2\upsilon \sin\alpha}{g} R^n$$

Полное время T, в течение которого шарик будет продолжать прыгать, может быть найдено, как сумма промежутков времени t_n:

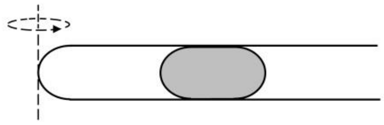
$$T = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \frac{2v\sin\alpha}{g}\sum_{n=0}^{\infty} R^n = \frac{2v\sin\alpha}{g}\cdot\frac{1}{1-R}$$

(Это сумма геометрической прогрессии).

Так как горизонтальная составляющая скорости шарика во время процесса не изменяется, то для расстояния S от точки бросания до точки, где шарик перестанет подпрыгивать, получаем:

$$S = T \cdot \upsilon \cos\alpha = \frac{2\upsilon \sin\alpha}{g(1-R)} \upsilon \cos\alpha = \frac{\upsilon^2 \sin 2\alpha}{g(1-R)} = 10 \text{ м}$$

Ответ:10 м



Задание 2. В горизонтально расположенной стеклянной трубке длиной L находится капля ртути массой m. Один из концов трубки герметично закрывают и плавно раскручивают систему вокруг этого конца до угловой скорости ω. Ось вращения вертикальна (см. рис). Найти, в каком месте трубки расположится капля, если первоначально она находилась на расстоянии x от закрытого конца. Атмосферное давление p_A, внутренний радиус трубки R. Считать, что размеры капли много меньше x, трением пренебречь.

Решение.

Обозначим *y* – расстояние от капли до закрытого конца трубки после установления равновесия. Центростремительное ускорение обеспечивается разностью давлений на каплю изнутри и снаружи:

$$m\omega^2 y = (p_A - p)\pi R^2$$

Давление внутри трубки легко найти с помощью закона Бойля-Мариотта:

$$p_A x = py$$

Из этих уравнений найдем *y*:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha} \text{ , где } \alpha = \frac{m\omega^2}{p_A \pi R^2} \text{ .}$$

Оба ответа >0, однако справедлив только один — только одно положение капли будет устойчивым. Рассмотрим функцию $F(y) = m\omega^2 y - (p_A - p(y))\pi R^2$. Если она больше нуля, каплю "тянет" наружу, иначе — внутрь. Т.к. y>0, функция F(y) имеет тот же знак, что и функция yF(y). Последняя же — парабола с осями, направленными вверх. Итак, если мы чуть увеличим $y_2 = \frac{1+\sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha}$, функция F(y) станет положительна, и каплю "потянет" наружу. Следовательно, это положение неустойчиво, а устойчивым является корень $y_1 = \frac{1-\sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha}$. Кроме того, полученный ответ имеет смысл, только **если y_1 < L,** иначе капля выскочит из трубки.

Ответ: $y_1 = \frac{1-\sqrt{1-\alpha x}}{2\alpha}$

Задание 3. В баллоне находится газ массой 2 кг при температуре 27°С и давлении $2 \cdot 10^5$ Па. Когда часть газа была выпущена, а оставшаяся часть нагрета до 627°С, то давление возросло до $3 \cdot 10^5$ Па. Какова будет плотность оставшейся части газа, если объем баллона 1 м^3 ?

Решение.

Уравнение Клапейрона-Менделеева для двух состояний:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1 \quad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2 \quad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2 T_2}{m_1 T_1} \text{ отсюда } m_2 = m_1 \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = 1 \text{ кг}$$

$$\rho = \frac{m_2}{V} = 1 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: 1 кг/м^3

Задание 4. Проволочное кольцо диаметром d = 0,1 м расположено перпендикулярно линиям магнитной индукции однородного магнитного поля с B = 2 Тл. Какая средняя ЭДС индукции возникает в контуре, если за время Δt = 0,1 с его форма станет такой, как показано на нижней части рисунка 2? Диаметр левого кольца d_1 = $d/4$. Какой электрический заряд пройдет по кольцу при изменении формы контура, если сопротивление проводника R = 0,2 Ом?

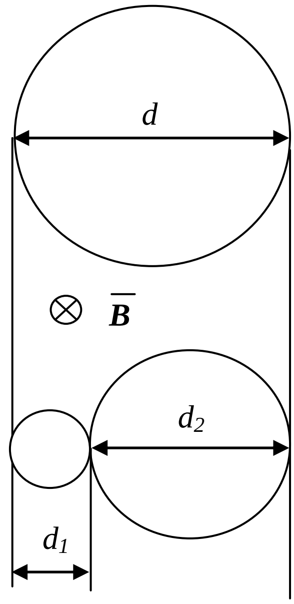


Рис.2

Решение.

В нашем случае изменение магнитного потока происходит за счет изменения площади:

$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t}$$

Пусть

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \qquad S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \qquad S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

В задаче возможны три случая:

1). Кольцо деформируется оставаясь в одной плоскости;

2). Перекручивается маленькое кольцо;

3). Перекручивается кольцо диаметра d_2

1) $\Delta S = S - (S_1 + S_2)$ $\qquad \Delta S = \frac{\pi d^2}{4}\left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{3\pi d^2}{32}$

$$E_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{3\pi d^2 B}{32\,\Delta t} = 5{,}9 \cdot 10^{-2}\, B$$

$$q = \frac{E_I}{R}\Delta t = \frac{3\pi d^2 B}{32\, R} = 2{,}9 \cdot 10^{-2}\, Кл$$

2) $S' = S_2 \_ S_1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{9d^2}{16} - \frac{d^2}{16}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} d^2$

$$\Delta S = \frac{\pi}{4}\frac{d^2}{2}$$

$$E_i = \frac{1}{8}\frac{\pi B d^2}{\Delta t} = 7{,}85 \cdot 10^{-2}\ B$$

$$q = \frac{\pi B d^2}{8R} = 3{,}9 \cdot 10^{-2}\, Кл$$

3) $\Delta S = S - (S_1 - S_2) = \frac{\pi d^2}{4}\left(1 - \frac{1}{16} + \frac{9}{16}\right) = \frac{3\pi d^2}{8}$

$$E_i = \frac{3}{8}\frac{\pi B d^2}{\Delta t} = 0{,}23\ B$$

$$q = \frac{3\pi B d^2}{8R} = 0{,}12\ Кл$$

Ответ: $q_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-2}\ Кл$

$q_2 = 3{,}9 \cdot 10^{-2}\ Кл$

$q_3 = 0{,}12\ Кл$

Задание 5. Светящаяся точка движется со скоростью υ параллельно главной оптической оси тонкой собирающей линзы, на расстоянии *h* от нее (рис.4). Найти мгновенную скорость *u* движения изображения точки, как функцию расстояния *d* от линзы до точки. Фокусное расстояние линзы *F*.

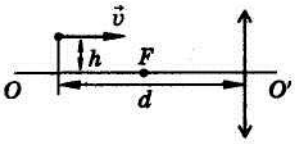


Рис. 4

Решение.

Запишем формулу тонкой линзы в некоторый момент времени, когда расстояния предмета и изображения равны d и f соответственно

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}. \tag{1}$$

Через промежуток времени Δt расстояние предмета станет $d_1 = d - \upsilon\Delta t$ и формула тонкой линзы примет вид

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d - \upsilon\Delta t}. \tag{2}$$

Выражая из (1), (2) расстояния до изображения, находим

$$\Delta f = f_1 - f = \frac{F(d - \upsilon\Delta t)}{d - \upsilon\Delta t - F} - \frac{Fd}{d - F} = \frac{F^2\upsilon\Delta t}{(d-F)^2}. \tag{3}$$

откуда следует выражение для составляющей скорости изображения, параллельной оптической оси линзы:

$$u_X = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{F^2\upsilon}{(d-F)^2}. \tag{4}$$

Для получения выражения составляющей скорости изображения, перпендикулярной оптической оси линзы, запишем формулы линейного увеличения линзы

$$\frac{h_1}{h} = \frac{f}{d} \tag{5}$$

$$\frac{h_2}{h} = \frac{f_1}{d - \upsilon\Delta t} \tag{6}$$

где h_1, h_2 – расстояния от изображения точки до оптической оси линзы в начальный момент времени и в момент времени $t + \Delta t$. Поступая аналогично первой части задачи, из (5) и (6) находим

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{hF\upsilon\Delta t}{(d-F)^2} \tag{7}$$

откуда для составляющей скорости, перпендикулярной к оптической оси линзы следует

$$u_y = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{hF\upsilon}{(d-F)^2} \tag{8}$$

Тогда для модуля скорости изображения точки из (4), (8) находим

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{F\upsilon\sqrt{F^2 + h^2}}{(d - F)^2} \tag{9}$$

Выкладки для получения формулы (7) из формул (5) и (6) достаточно громоздки, но эту формулу можно получить из соотношения (5), и формулы (1), выразив h_1 через h, F и d.

$$h_1 = \frac{hF}{d - F} \tag{10}$$

Продифференцировав по времени, получим:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{hF}{(d - F)^2}\frac{\Delta d}{\Delta t} \text{ , то есть } \qquad u_y = \frac{hF\upsilon}{(d - F)^2}$$

Ответ: $u = \dfrac{F\upsilon\sqrt{F^2 + h^2}}{(d - F)^2}$