10 класс

Задание 1. На гладкую горизонтальную спицу надеты две бусинки массами m и 2m, связанные лёгкой нитью длиной $2L$. К середине нити прикреплён груз массой 2m. Сначала груз удерживают так, что бусинки на спице отстоят друг от друга на расстоянии $2L$. Затем груз отпускают без толчка (рис.1). Вычислите скорости бусинок на спице перед их соударением. Известно, что в течение всего времени движения системы нити не провисают.

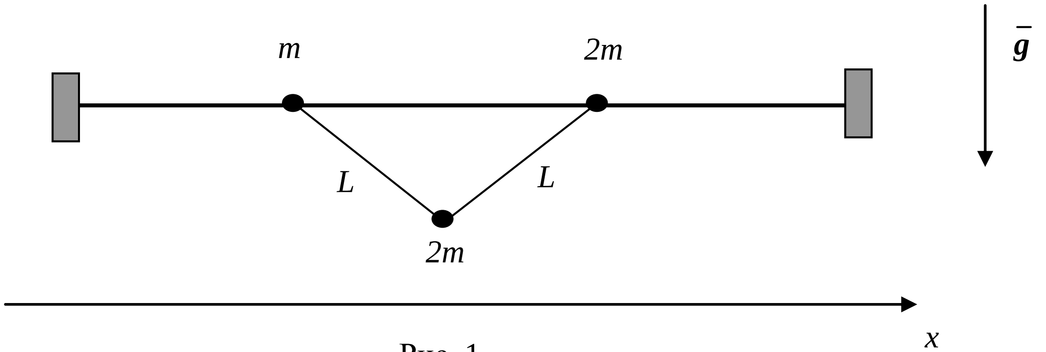


Рис. 1

Решение.

Пусть проекции скоростей бусинок массами m и 2m на ось x перед соударением равны u и v соответственно. Нити в этот момент вертикальны, поэтому скорость груза может иметь только горизонтальную составляющую. Поскольку, в любой момент времени груз расположен на одной вертикали с серединой отрезка, соединяющего верхние бусинки, проекция его скорости на ось x равна среднему арифметическому проекций скоростей бусинок, то есть $(u-v)/2$. Запишем законы сохранения импульса и энергии в проекции на ось x

$$mu - 2mv + 2m\frac{u-v}{2} = 0$$
$$2u - 4v + 2u - 2v = 0$$
$$u = 3v/2$$
$$\frac{mu^2}{2} + \frac{2mv^2}{2} + \frac{2m(u-v)^2}{2\cdot 4} = 2mgL$$
$$\frac{9}{8}v^2 + \frac{8v^2}{8} + \frac{v^2}{16} = 2gL$$
$$35v^2 = 32gL$$
$$v = 4\sqrt{\frac{2\cdot gL}{35}}$$
$$u = 6\sqrt{\frac{2\cdot gL}{35}}$$

Ответ: $v = 4\sqrt{\frac{2\cdot gL}{35}}$ $\qquad u = 6\sqrt{\frac{2\cdot gL}{35}}$

Задание 2. В цилиндрическом сосуде плавает плитка пенопласта, на которой лежит кубик (рис.2). Когда кубик сняли, уровень воды понизился на $h_1 = 15$ см. Затем кубик опустили в воду. Уровень воды поднялся на $h_2 = 5$ см. Найти плотность материала кубика ρ.

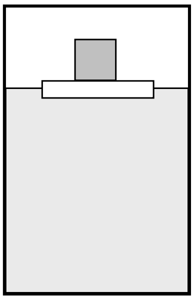


Рис.2

Решение.

Пусть S – площадь поперечного сечения сосуда, m_1 – масса плитки, m_2 – масса кубика. Условие плавания плитки с кубиком:

$$(m_1 + m_2)g = \rho_0 Vg \qquad (1)$$

где V– объем погруженной части плитки, ρ_0 – плотность воды.

Условия плавания плитки:

$$m_1 g = \rho_0 V_1 g$$

где V_1– объем погруженной части плитки, ρ_0 – плотность воды.

Изменение объема воды в сосуде

$$\Delta V = V_1 - V = -m_2/\rho_0$$

или

$$m_2/\rho_0 = h_1 S$$

Поскольку после погружения кубика уровень воды поднялся на $h_2 < h_1$, то кубик утонул. В этом случае имеем уравнение.

$$m_2 = \rho h_2 S$$

где ρ – плотность кубика.

Из этих уравнений получаем

$$\rho h_2 S = \rho_0 h_1 S$$

Для плотности кубика

$$\rho = \rho_0 \frac{h_1}{h_2} = \frac{10^3 \cdot 15}{5} \text{ кг/м}^3 = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: $3 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}

Задание 3. В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжелый поршень (рис. 3). Масса газа и температура под поршнем и над ним одинаковы. Отношение объема над поршнем к объему под поршнем равно 3. Каким будет это отношение, если температуру в сосуде увеличить в 2 раза?

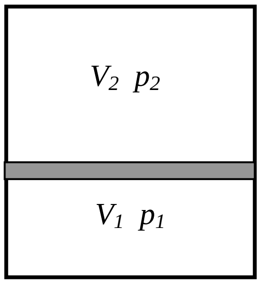


Рис.3

Решение.

Обозначим через V_4 и p_4 объем и давление над поршнем, а через V_3 и p_3 объем и давление под поршнем ***после*** увеличения температуры. Тогда можем записать:

$$p_1 = p_2 + \frac{mg}{S} \qquad p_3 = p_4 + \frac{mg}{S}$$

$$p_1 - p_2 = p_3 - p_4 \qquad p_1 = \frac{\nu RT}{V_1} \qquad p_2 = \frac{\nu RT}{V_2}$$

$$p_1 - p_2 = \nu RT\left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}\right) \quad \text{и} \quad p_3 - p_4 = 2\nu RT\left(\frac{V_4 - V_3}{V_3 V_4}\right)$$

$$2\,\nu RT\left(\frac{V_4 - V_3}{V_3 V_4}\right) = \nu RT\left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}\right) \qquad *)$$

Введем $k_1 = \frac{V_2}{V_1}$ и $k_2 = \frac{V_4}{V_3}$ $V_0 = V_1 + V_2 = V_3 + V_4$, тогда

$$V_1 = \frac{1}{k_1 + 1} V_0 \qquad V_2 = \frac{k_1}{k_1 + 1} V_0$$

$$V_3 = \frac{1}{k_2 + 1} V_0 \qquad V_4 = \frac{k_2}{k_2 + 1} V_0$$

Подставив выражения для объемов в формулу *)**,** получим:

$$\frac{k_2^2 - 1}{k_2} = \frac{k_1^2 - 1}{2k_1} = 4/3$$

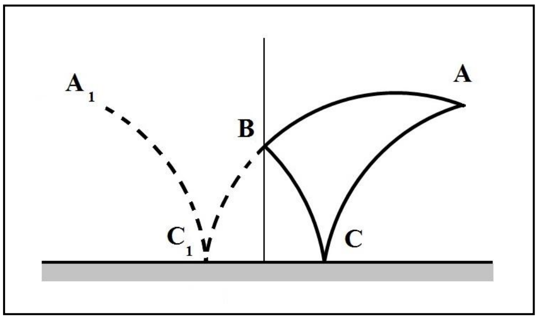
Тогда $$k_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}$$

Ответ: $k_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}$

Задание 4. Спортсмен стоит на расстоянии 10 метров от вертикальной стены и кидает в неё мяч вытянутыми вверх руками. Мяч вылетает из его рук на высоте 2 метра над землей с начальной скоростью 15 м/с. Далее мяч сначала ударяется о стену, затем о пол и возвращается точно в руки спортсмена (по-прежнему вытянутые над головой), находясь на восходящем участке своей траектории. Определите скорость мяча непосредственно перед ударом о пол и угол, который составляет вектор скорости мяча с горизонтом в этот момент времени. Удары мяча о пол и стену считайте абсолютно упругими.

Решение.

На рисунке А-В-С-А – траектория полета мяча. Так как мяч отражается от стены абсолютно упруго, то участок траектории В-С-А будет симметричен участку В-C_1-A_1 траектории, которую имел бы мяч, если бы стены не было.



Так как удар мяча о пол тоже абсолютно упругий, то участок траектории В-C_1 симметричен участку C_1-A_1 (некоторой его части). Если перенести участок траектории A_1-C_1 правее, совместив точки А и A_1, то мы получим траекторию полета мяча C_1-A_1(А)-В-C_1 с пола на пол. Расстояние, которое он пролетает по такой траектории по горизонтали, равно 2L. Скорость мяча у пола можно найти из закона сохранения энергии:

$$mgh + \frac{mV_0^{\ 2}}{2} = \frac{mV_1^2}{2}$$

откуда V_1 = 16,25 м/с.

За время полета мяча от пола до пола его вертикальная проекция скорости меняется с $+V_1 \sin\beta$ до $-V_1 \sin\beta$. Тогда время полета $t = \frac{V_1 \sin\beta}{g}$. Дальность полета равна 2L. Отсюда $\sin(2\beta) = \frac{2Lg}{V_1^2} = 0,74$. Отсюда β=24°.

Ответ: V_1 = 16,25 м/с, β=24°.

Задание 5. Диэлектрический шар радиуса *r* с зарядом *q* поместили рядом с бесконечной металлической плоскостью, так что центр шара находится на расстоянии *R* от плоскости. Заряд распределен по шару равномерно. Когда шар отпустили, он испытал неупругое столкновение с плоскостью. Сколько при этом выделилось тепла?

Решение.

Очевидно, что количество теплоты, выделившейся при неупругом ударе, по закону сохранения энергии будет равно разности энергий в начальном и конечном состоянии. Заряд q создаёт в плоскости согласно методу зеркальных изображений фиктивный индуцированный заряд противоположного знака, находящийся на расстоянии 2R от данного заряда. Определим потенциальную электростатическую энергию заряда q над бесконечной плоскостью, в которой индуцируется заряд противоположного знака. Можно предположить, что эта энергия в начальном состоянии равна работе при раздвижении на бесконечность зарядов q и –q, находящихся на расстоянии 2R, т.е. :

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2R} .$$

Однако, при удалении заряда q от поверхности металла будет удалятся в противоположную сторону и его изображение –q. Поэтому по вышеприведённой формуле определяется работа, которая совершается внешними силами, действующими на оба заряда. Нам же необходимо найти работу только одной из этих сил, действующей на данный заряд q: ведь на самом деле никакого заряда –q нет, а есть множество зарядов, индуцированных на поверхности металла (в сумме равные q), которые растекаются по эквипотенциальной поверхности, так что никакой работы при их перемещении не совершается. Таким образом, интересующая нас энергия начального состояния равна половине вышеприведённой работы, т.е. :

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4R}.$$

Аналогично, для второго состояния :

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4r}.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q^2\left(\frac{1}{4r} - \frac{1}{4R}\right)$$

Ответ: $kq^2/(4r) - kq^2/(4R)$