

*Задачи заочного тура по математике для 9 класса 2014/2015 уч. год, первый
уровень сложности*

Задача № 1

Решить уравнение: $(x+3)^{63} + (x+3)^{62}(x-1) + (x+3)^{61}(x-1)^2 + \dots + (x-1)^{63} = 0$

Ответ: -1

Задача № 2

Сумма двух чисел равна 2014. Если у одного из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится другое найти большее из этих чисел.

Ответ: 1831

Задача № 3

Известно, что $x - y = 3$, $xy = 2$. Найти $x^5y + xy^5$

Ответ: 322

Задача № 4

Натуральные решения уравнения $y^2 = x^2 + x^3$ расположили в порядке возрастания x и перенумеровали. Найти решение с номером 19. В ответе указать только значение x .

Задача № Ответ: 399

Комментарий: (399;7980)

Задача № 5

Решить в целых числах уравнение $x^4 = y^4 + 2y^2 + 157$. В ответе указать $x + y$.

Ответ: 7

Комментарий: (4;3)

Задача № 6

Три числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Их сумма равна 26, а сумма квадратов равна 364. Найти знаменатель этой прогрессии.

Ответ: 3

Задача № 7

Решить в целых числах уравнение $x^2 + 19x - x! = 0$, где $x!$ – произведение натуральных чисел от 1 до x включительно (факториал).

Ответ: 5

Задача № 8

Найти площадь равнобокой трапеции, у которой длина диагонали равна 8, угол между диагоналями равен 30°

Ответ: 16

Задача № 9

Вычислить сумму: $2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 30 \cdot 2^{30}$

Ответ: 62277025794

Задача № 10

Найти НОД($2^{40} - 1, 2^{30} - 1$)

Ответ: 1023

Комментарий: $2^{10} - 1 = 1023$

Задача № 11

Найти множитель числа $2^{2015} + 1$ лежащий на отрезке $[30,40]$.

Ответ: 33

Комментарий: $= (2^{2013} + 1)^2 = (2^{11 \cdot 183} + 1)^2$, множители $2^5 + 1, 2^{11} + 1, \dots$ (т.к. $2015 = 5 \cdot 403$)

Задача № 12

В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, равна 12, а периметр треугольника равен 60. Найдите меньшую сторону треугольника.

Ответ: 15

Задача № 13

Найдите наибольшее натуральное значение x , при котором число $x^2 - 4x + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ является квадратом натурального числа?

Ответ: 27

Задача № 14

На какое наименьшее число надо умножить 9, чтобы получить число, состоящее из одних двоек?

Ответ: 24691358

Задача № 15

Сумма первых трех членов возрастающей арифметической прогрессии равна 21. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему члену прибавить 2, то полученные три члена составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму восьми первых членов геометрической прогрессии.

Ответ: 765

Комментарий: обозначим через a_i - члены арифметической прогрессии с разностью d , через b_i - геометрической, с знаменателем q . Согласно формуле суммы

арифметической прогрессии имеем $S_3 = (2a_1 + 2d) \cdot 3 / 2 = 21$ или $a_1 + d = 7$. По условию $a_1 - 1, a_1 + d - 1, a_1 + 2d + 2$ - три последовательных члена геометрической прогрессии. Используем свойство геометрической прогрессии: $(a_1 + d - 1)^2 = (a_1 + 2d + 2)(a_1 - 1)$. После замены переменной $a_1 = 7 - d$ и открытия скобок получаем квадратное уравнение $d^2 + 3d - 18 = 0$, т.е. $d_1 = 3, d_2 = -6$. Условию удовлетворяет лишь $d_1 = 3$ (т.к. арифметическая прогрессия возрастающая). В этом случае $a_1 = 4$. Находим $b_1 = a_1 - 1 = 3, b_2 = a_1 + d - 1 = 6$, откуда $q = 2$. Наконец, согласно формуле суммы членов геометрической прогрессии получаем: $S_8 = [b_1(q_8 - 1)] / (q - 1) = 765$.

Задача № 16

Найти сумму всех трехзначных чисел, которые делятся на 7.

Ответ: 70336

Комментарий: сначала найдем минимальное и максимальное трехзначные числа, которые делятся на 7. Это числа 105 и 994 соответственно. Запишем $a_1 = 105, a_m = 994$. Найдем m , т.е. количество трехзначных чисел, которые делятся на 7.

Используем свойство прогрессии и получаем: $994 = 105 + 7(m - 1)$. Откуда $m = 128$.

А теперь воспользуемся формулой суммы m членов арифметической прогрессии $S_{128} = (105 + 994) \cdot 128 / 2 = 70336$.

Задача № 17

Известно, что некоторая арифметическая прогрессия содержит члены a_{2014} и a_{2016} такие, что имеет место соотношение $a_{2014} = -a_{2016}$. Найти номер члена этой прогрессии, который равен нулю.

Ответ: 4030

Комментарий: исходя из условия получаем: $a_{2n} + a_{2m} = 0$. Используя формулу, выражающий некий член прогрессии через первый член и разность, получаем: $a_1 + (2n - 1)d + a_1 + (2m - 1)d = 0$; $2a_1 + 2nd + 2md - 2d = 0$; $a_1 + (n + m - 1)d = 0$. А это и означает, что существует член арифметической прогрессии с первым элементом a_1 и разностью d , который равен нулю. Т.е., используя ту же формулу, имеем $a_{n+m} = 0$.

Задача № 18

Разность арифметической прогрессии не равна нулю. Числа, которые равны произведению первого члена этой прогрессии на второй, второго члена на третий и третьего на первый, в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию.

Найти ее знаменатель.

Ответ: -2

Комментарий: обозначим через a, b, c члены арифметической прогрессии. Исходя из свойств арифметической прогрессии $2b = a + c$ (*). По условию ab, bc, ac образуют геометрическую прогрессию. Найдем ее знаменатель q . Он равен отношению второго члена геометрической прогрессии на первый или третьего на второй.

Запишем: $q = bc/ab = ac/bc$. Или $q = c/a = a/b$. Из свойств геометрической прогрессии также получаем, что $b^2c^2 = ac \cdot ab$, т.е. $bc = a^2$. Или $b = a^2/c$. Подставляем это значение b в полученное ранее равенство (*): $2a^2/c = a + c$; $2a/c = 1 + c/a$; Делаем замену $q = c/a$ (которое нам и нужно найти, т.к. это отношение и является искомым знаменателем) и после преобразования получаем квадратное уравнение $q^2 + q - 2 = 0$. У него два решения $q = 1$ или $q = -2$. Но заметим, если $q = 1$, то $c/a = a/b = 1$, т.е. $a = b = c$, что не удовлетворяет условию, т.к. в данном случае разность арифметической прогрессии равна 0. Потому ответ один $q = -2$.

Задача № 19

В хоре число девочек относилось к числу мальчиков как 4:3. После того как в хор пришли двое новеньких, это соотношение стало 3:2. Сколько мальчиков было в хоре вначале?

Ответ: 12

Комментарий: пусть вначале было $4x$ девочек, $3x$ мальчиков. Пусть среди новеньких a девочек. Тогда $(4x + a) : (3x + (2 - a)) = 3:2$. Отсюда $x = 5a - 6$ Единственно возможное значение $a = 2$ приводит к $x = 4$.

Задача № 20

В четырехугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке M. Известно, что $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 4$. При каких значениях DM четырехугольник ABCD является трапецией? Указать наибольшее из решений.

Ответ: 8

Комментарий: Четырехугольник ABCD является трапецией, если DM равно 8 или 0,5. Возможны два варианта: основаниями трапеции являются стороны AB и CD или AD и BC. Рассмотрим *первый случай*: $\triangle AMB$ должен быть подобен $\triangle CMD$, откуда $AM : MC = BM : DM$, $DM = 8$. Во *втором случае* подобными треугольниками будут AMD и BMC. Тогда $AM : MC = BM : DM$, откуда $DM = 0,5$.

Задача № 21

Решите уравнение: $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$. В ответе указать сумму его корней.

Ответ: 7

**Задачи заочного тура по математике для 9 класса 2014/2015 уч. год, второй
уровень сложности**

Задача № 1

Решить уравнение: $3(1 + x + x^2)^2 = 7(1 + x^2 + x^4)$. В ответе указать наибольший корень.

Ответ: 2

Комментарий: 2; 0,5

Задача № 2

Решить уравнение: $x^5 + (x+1)^5 + \dots + (x+2014)^5 = 0$

Ответ: -1007

Задача № 3

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $xy = 2014(x + y)$?

Ответ: 27

Задача № 4

Стороны параллелограмма равны 11 и 20, а диагонали относятся как 2:3. Найти большую диагональ.

Ответ: 30

Задача № 5

Решить в целых числах уравнение $x!^2 = 24 \cdot y!^2 + 576$. В ответе указать $x + y$.

Ответ: 9

Комментарий: (5;4)

Задача № 6

Найти сумму первых 100 членов последовательности, если ее k -ый член задан формулой $a_k = 4k(k^2 + 1) - (6k^2 + 1)$

Ответ: 100000000

Комментарий: $100^4 = 100000000$

Задача № 7

Найти множитель числа $2^{2015} + 1$ лежащий на отрезке $[2000, 3000]$.

Ответ: 2049

Комментарий: $= (2^{2013} + 1)^2 = (2^{11 \cdot 183} + 1)^2$, множители $2^5 + 1, 2^{11} + 1, \dots$ (т.к. $2015 = 5 \cdot 403$)

Задача № 8

Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1; 1)$. Найти отношение чисел: $a^5 + d^6$ и $c^6 - b^5$.

Ответ: 1

Комментарий: $a^5 + d^6 = c^6 - b^5$. Так как графики функций проходят через точку $(1; 1)$, то выполняются равенства: $1 = 1 + a + b$ и $1 = 1 + c + d$, то есть, $a = -b$ и $c = -d$.

Следовательно, $a^5 = -b^5$ и $d^6 = c^6$. Складывая эти неравенства почленно, получим, что $a^5 + d^6 = c^6 - b^5$.

Задача № 9

Дан многочлен: $P(x) = (x + 3)^9(x^2 + x - 2)^3(4x + 3)^3$. В этом выражении раскрыли скобки и привели подобные члены. Найти сумму коэффициентов при четных степенях x .

Ответ: 2048

Комментарий: $= (P(1) + P(-1))/2$

Задача № 10

Какое наименьшее натуральное число надо прибавить к выражению $(a+2)(a+5)(a+8)(a+11)$, чтобы сумма была положительной при любом a ?

Ответ: 82