Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2014/2015гг
Очный этап
Математика
9 класс

Общее время выполнения работы – 2 астрономических часа (120 мин).
Количество задач – 4.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1. (7 баллов.)
Скорый поезд отправился из пункта А в пункт В ровно в 8 часов утра. Навстречу ему в это же время из пункта В отправился товарный поезд. Они встретились в пункте С в 12:00 часов этого же дня. Через два часа скорый поезд прибыл в пункт В. Во сколько товарный поезд прибудет в пункт А, если скорость каждого из поездов постоянна?
Решение
Скорый поезд прошел путь СВ в два раза быстрее, чем АС, поэтому и товарный поезд прошел этот путь быстрее во столько же раз. Следовательно, путь СА он пройдет за восемь часов и прибудет в пункт А в 20:00 часов.
Ответ в 20:00 часов.

Задание 2. (7 баллов.)
12. Докажите, что справедливо неравенство
13. $\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{10000}{9999}>100$
14. Решение
15. Возведем левую часть в квадрат и оценим:
$$\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{10000}{9999}\right)^2>$$
$$>\frac{1\cdot3}{1\cdot1}\cdot\frac{3\cdot5}{3\cdot3}\cdot\frac{5\cdot7}{5\cdot5}\cdot\ldots\cdot\frac{9999\cdot10001}{9999\cdot9999}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{10001}{9999}=10001$$
Откуда и следует доказываемое неравенство.

Задание 3. (7 баллов.)
16. Назовём *пушистыми* числа вида:

17. $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$

18. где a и b – целые числа, не равные нулю.

19. Аналогично, назовём *шершавыми* числа вида:

20. $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$

21. где c и d – целые числа, не равные нулю.

22. Может ли *шершавое* число равняться сумме нескольких *пушистых*?

Решение

23. Может, например:

24. $\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{7}}$

Это равенство легко проверить возведением в квадрат. Как догадаться до такого равенства? Будем искать шершавое число, равное сумме двух пушистых. Опыт работы с радикалами подсказывает, что нужно брать сопряженные числа:

25. $\sqrt{A+B\sqrt{2}}+\sqrt{A-B\sqrt{2}}=\sqrt{C+D\sqrt{7}}$

(*)

Возводя обе части равенства в квадрат, получим:

$2A+2\sqrt{A^2-2B^2}=C+D\sqrt{7}$

Итак, достаточно подобрать такие числа A и B, что $A^2 - 2B^2 = 7$, тогда можно взять $C = 2A$, $D = 2$.

26. Замечание. Уравнение $A^2 - 2B^2 = 7$ имеет бесконечно много решений в целых числах. Поэтому и уравнение (*) имеет бесконечно много решений. Это связано с тем, что уравнение Пелля $A^2 - 2B^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

За правильный ответ без обоснований ставится 0 баллов.

Задание 4. (7 баллов.)

27. Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда для длин сторон треугольника выполняется равенство:

28. $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Решение

29. Пусть M – точка пересечения медиан AA_1 и BB_1.

30. Угол AMB прямой тогда и только тогда, когда $AM^2 + BM^2 = AB^2$, т.е. $4(m_a^2 + m_b^2)/9 = c^2$.

31. Согласно формуле, связывающей медианы и стороны ($m_a^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4$.

32. Эта формула может быть получена с применением теоремы Пифагора) $m_a^2 + m_b^2 = (4c^2 + a^2 + b^2)/4$, откуда и следует требуемое равенство.