Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2014/2015гг
Очный этап
Математика
11 класс

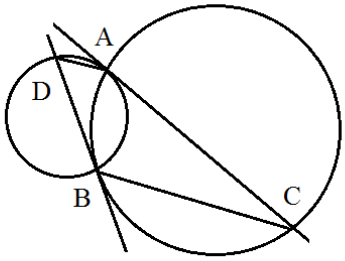
Общее время выполнения работы – 3 астрономических часа (180 мин).
Количество задач – 5.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

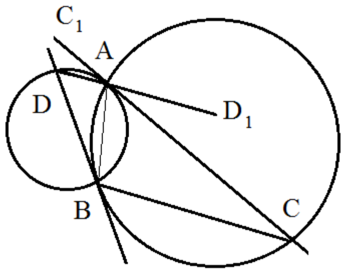
Задание 1. (7 баллов.)
Какое самое большое количество действительных корней может иметь уравнение:
$x^{100} + ax + 1 = 0$?
Решение
На промежутке
$$\left(-\infty; \sqrt[99]{\frac{-a}{100}}\right)$$
функция $f(x) = x^{100} + ax + 1$ убывает, а на промежутке
$$\left(\sqrt[99]{\frac{-a}{100}}; +\infty\right)$$
возрастает, поэтому уравнение имеет не более двух действительных корней. В частности при а = 3
f(-1) = -1, f(0) = 1, f(-2) >0, поэтому при а = 3 имеется 2 корня.

Задание 2. (7 баллов.)
Найти какое-нибудь решение уравнения $x^2 – 2y^2 = 1$ в натуральных числах, для которого выполнено условие:
$x > 2015$.
Решение
Легко проверить, что (3, 2) решение и если (x, y) решение уравнения, то и (3x+4y, 2x+3y) тоже решение. Отсюда получаем последовательность решений:
(3, 2), (17, 12), (99, 70), (577, 408), (3363, 2378), …

Задание 3. (7 баллов.)
Две окружности пересекаются в точках **A** и **B.** Через эти точки провели касательные **AC** и **BD** соответственно (одна к первой окружности, а другая ко второй окружности).
Найти угол между прямыми **AD** и **BC**.



Решение
Докажем параллельность этих прямых. AC и BD - касательные к окружностям. Угол BCA = углу ABD. Угол ABD = углу DAC_1. Угол DAC_1 = углу CAD_1. Если углы BCA и CAD_1 равны, то прямые параллельны



Задание 4. (7 баллов.)
Доказать, что справедливо равенство:
$4\cos^2 36^0 - 2\cos 36^0 - 1 = 0$.
Решение
$\sin(72^0) = \sin(108^0)$
$\sin(2\cdot 36^0) = \sin(3\cdot 36^0)$
$2\sin(36^0)\cos(36^0) = \sin(36^0)(3\cos^2(36^0) - \sin^2(36^0))$
$2\cos(36^0) = 4\cos^2(36^0) - 1$
$4\cos^2(36^0) - 2\cos(36^0) - 1 = 0$

Задание 5. (7 баллов.)
Дана функция
$f(x) = 6 + \sqrt{x}$
С помощью этой функции вычислили число:
$\underbrace{f(f(f\ldots f(6)\ldots))}_{2015 раз}$
Доказать, что десятичная запись этого числа содержит после запятой более 600 подряд идущих девяток.
Решение
$s_n = \underbrace{f(f(f\ldots f(6)\ldots))}_{n\ \ раз}, \quad s_n = 6 + \sqrt{s_{n-1}}$
Т. к. $s_1 < 9$, то и $s_n < 9$. С другой стороны

$$9 - s_n = 3 - \sqrt{s_{n-1}} = \frac{9 - s_{n-1}}{3 + \sqrt{s_{n-1}}}, \quad 9 - s_1 = 9 - (6 + \sqrt{6}) = \frac{3}{3 + \sqrt{6}} < 1$$

Поэтому $9 - s_n < 1, \quad s_n > 8, \quad 3 + \sqrt{s_n} > 5, \quad 9 - s_n = 3 - \sqrt{s_{n-1}} = \dfrac{9 - s_{n-1}}{3 + \sqrt{s_{n-1}}} < \dfrac{1}{5}(9 - s_{n-1})$

Поэтому $9 - s_n < \dfrac{1}{5^{n-1}}, \quad 9 - s_{2015} < \dfrac{1}{5^{2014}} = \dfrac{1}{25^{1007}} < \dfrac{1}{10^{600}}, \quad s_{2015} > 9 - \dfrac{1}{10^{600}}$

А это и доказывает утверждение.