

Задачи и решение отборочного этапа олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике

Задача 1. Логические схемы: возведение в квадрат (5 баллов)

Постройте логическую схему для возведения (не более чем) трёхзначного двоичного числа в квадрат.

Число задаётся входами логической схемы. Результат возведения в квадрат - выходы логической схемы (не более, чем шестизначное число). В обоих числах цифры идут сверху вниз.

Разрешается использовать стандартные логические элементы И, ИЛИ и НЕ, а также элемент РАВНО, который даёт значение 1, когда на его входы поданы одинаковые числа, и 0, когда разные.

Задача 2. Машина Тьюринга. Переворот (5 баллов)

Постройте машину Тьюринга, которая переворачивает записанную на ленте строку из нулей и единиц.

Например, строка ***110010*** должна превращаться в ***010011**

Разрешается использовать вспомогательный символ 2.

Начальное состояние s , конечное f

Задача 3. Железная дорога (3 балла)

Требуется построить 8 станций и наибольшее количество прямых железнодорожных линий между ними так, чтобы линии не пересекались.

Баллы будут выставляться пропорционально количеству построенных линий. Картинки, не удовлетворяющие условию, оцениваются в 0 баллов.

Задача 4. Очень нехорошие слова длины 10 (3 балла)

Хорошими словами назовём слова из букв a и b , в которых количества букв a и b дают одинаковый остаток при делении на 3 (то есть, их разность кратна трём). Все остальные слова назовём нехорошими.

Очень нехорошими назовём такие нехорошие слова, что любой их непустой начальный отрезок - тоже нехорошее слово.

Например, слово $aaab$ начинается с хорошего слова aaa и поэтому не является очень нехорошим.

Найдите все очень нехорошие слова длины 10 и докажите, что других нет.

Задача 5. Очень нехорошие слова. Описание при помощи формулы (4 балла)

Хорошими словами назовём слова из букв a и b , в которых количества букв a и b дают одинаковый остаток при делении на 3 (то есть, их разность кратна трём). Все остальные слова назовём нехорошими.

Очень нехорошими назовём такие нехорошие слова, что любой их непустой начальный отрезок - тоже нехорошее слово.

Например, слово $aaab$ начинается с хорошего слова aaa и поэтому не является очень нехорошим.

Пустое слово является хорошим, то есть также не подходит под условие.

Опишите все очень нехорошие слова.

Для описания используйте формулы, которые называются регулярными выражениями.

Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию "звездочка" (итерация), например, $(abb)^*$ задаёт множество слов {пустое слово, abb , $abbabb$, $abbabbabb$, ...}

Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой или вообще опускают, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со

словами второго (третьего и т.д.), например a^*cb^* обозначает множество слов: $\{c, ac, cb, acb, aac, \dots, aaa \dots acb \dots b, \dots\}$. Обратите внимание что слова, в которых нет букв a или b , получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так обозначение $(a+b)^*c+d(ac^*+)$ описывает множество всех последовательностей из букв a и b (обозначается $(a+b)^*$), к концу которых присоединена буква c , объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы d , за которой следует буква a , а за ней любое число букв c и ещё одним однобуквенным словом (d умножить на пустое слово — это d)."

Слева приведены примеры слов, которые удовлетворяют нашему условию, справа примеры слов, которые не удовлетворяют ему. Благодаря подсветке вы можете видеть, какие из этих примеров и контрпримеров удовлетворяют построенному вами выражению, а какие — нет.

В качестве начального решения вы можете видеть выражение, которому удовлетворяет слово a и пустое слово.

Задача 6. Хорошие слова. Описание при помощи формулы (6 баллов)

Хорошими словами назовём слова из букв a и b , в которых количества букв a и b дают одинаковый остаток при делении на 3 (то есть, их разность кратна трём). Все остальные слова назовём нехорошими.

Пустое слово является хорошим, то есть подходит под условие.

Опишите все хорошие слова. Для описания используйте формулы, которые называются регулярными выражениями.

Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию "звездочка" (итерация), например, $(abb)^*$ задает множество слов $\{\text{пустое слово}, abb, abbabb, abbabbabb, \dots\}$

Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой или вообще опускают, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со словами второго (третьего и т.д.), например a^*cb^* обозначает множество слов: $\{c, ac, cb, acb, aac, \dots, aaa \dots acb \dots b, \dots\}$. Обратите внимание что слова, в которых нет букв a или b , получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так обозначение $(a+b)^*c+d(ac^*+)$ описывает множество всех последовательностей из букв a и b (обозначается $(a+b)^*$), к концу которых присоединена буква c , объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы d , за которой следует буква a , а за ней любое число букв c и ещё одним однобуквенным словом (d умножить на пустое слово — это d)."

Слева приведены примеры слов, которые удовлетворяют нашему условию, справа примеры слов, которые не удовлетворяют ему. Благодаря подсветке вы можете видеть, какие из этих примеров и контрпримеров удовлетворяют построенному вами выражению, а какие — нет.

В качестве начального решения вы можете видеть выражение, которому удовлетворяет слово a и пустое слово.

Задача 7. Хорошие слова. Распознающая схема (3 балла)

Хорошими словами назовём слова из букв a и b , в которых количества букв a и b дают одинаковый остаток при делении на 3 (то есть, их разность кратна трём). Все остальные слова назовём нехорошими.

Пустое слово является хорошим, то есть подходит под условие.

Постройте схему, распознающую все хорошие слова.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок, символизирующих правила, по которым работает эта схема. . Схема начинает работу в начальном состоянии S_0 ,

выделенном оранжевым. Поступающее на ход слово анализируется посимвольно. При рассмотрении каждого символа мы переходим из текущего состояния по стрелочке, над которой написан этот символ.

После того, как всё слово проанализировано, мы заканчиваем работу в одном из состояний. Некоторые состояния необходимо пометить как конечные (жирная каёмка). Это те состояния, в которых мы оказываемся, проанализировав нужные слова.

Задача 8. Алгоритм Евклида. Худший случай (3 балла)

Алгоритм Евклида работает следующим образом: в паре чисел (a, b) большее число заменяется на их разность.

Найдите пару взаимно простых двузначных чисел, из которой можно получить пару, в которой одно из чисел равно единице, не ранее, чем через 49 шагов алгоритма.

Задача 9. Ладьи (5 баллов)

На шахматной доске стоят красные и синие ладьи. Ладья бьёт другую, если они находятся на одной вертикали или на одной горизонтали. (считается, что ладья бьёт сквозь другую ладью, ладья бьёт сама себя а также может бить других ладей своего цвета).

Напишите логическую формулу, описывающую свойство, которым обладает комбинация ладей на левой картинке, но не обладает комбинация на правой. Постарайтесь, чтобы описание было как можно короче.

В формуле используются следующие обозначения.

Ладьи обозначаются переменными x, y, z . Простые свойства описываются такими выражениями как "x синяя", "y красная", "x бьёт y" (последнее означает, что фишки стоят на различных клетках, у которых есть общая сторона или угол). Для записи более сложных свойств используются логические связки, которые соединяют простые свойства:

И, ИЛИ, НЕ ВЕРНО ЧТО, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ДЛЯ ВСЕХ x , СУЩЕСТВУЕТ x ТАКОЙ, ЧТО (вместо x можно использовать y или z).

Для упорядочения связок используются круглые скобки. В качестве начального решения введена формула, которая не верна для обеих картинок.

