

**Задачи очного тура Олимпиады
по Дискретной Математике и Теоретической Информатике-2019**

1. Последовательности 1 типа. Логическая схема. (4 балла)

Постройте логическую схему с шестью входами и одним выходом.

На вход подаётся последовательность нулей и единиц (сверху вниз). Схема должна выдавать значение "1" ("ИСТИНА") на тех (и только на тех) последовательностях, в которых для любого начального отрезка количество нулей не превосходит количество единиц.

Так, **101010** — подходящая последовательность, а **110001** — нет, так как среди первых пяти элементов три нуля и только две единицы.

2. Последовательности 1 типа. Логическая схема-2. (10 баллов)

На вход подаётся последовательность нулей и единиц (сверху вниз). Схема должна выдавать значение "1" ("ИСТИНА") на тех (и только на тех) последовательностях, в которых для любого начального отрезка количество нулей не превосходит количество единиц.

Так, **101010** — подходящая последовательность, а **110001** — нет, так как среди первых пяти элементов три нуля и только две единицы.

Докажите, что можно построить такую логическую схему для $n > 100$ входов, используя не более $((n+2)^2)/4$ логических элементов.

3. Последовательности 1 типа. Количество последовательностей (Текстовая задача) (6 баллов)

Найдите количество таких последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых для любого начального отрезка количество нулей не превосходит количество единиц.

Так, **101010** — подходящая последовательность, а **110001** — нет, так как среди первых пяти элементов три нуля и только две единицы.

4. Последовательности 2 типа. Описание последовательности. (3 балла)

Опишите множество всех последовательностей из букв **a** и **b** таких, что в любом наборе подряд идущих символов (длины больше 1) букв **a** не меньше, чем букв **b**

Обратите внимание! В отличие от предыдущей задачи, рассматриваются не только начальные отрезки последовательности, а вообще любые!

Для описания используйте формулы, которые называются регулярными выражениями. Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию "звездочка" (итерация), например, $(abb)^*$ задает множество слов {пустое слово, **abb**, **abbabb**, **abbabbabb**, ...}

Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой или вообще опускают, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со словами второго (третьего и т.д.), например a^*cb^* обозначает множество слов: {**c**, **ac**, **cb**, **acb**, **aac**,..., **aaa...acb...b**, ...}. Обратите внимание что слова, в которых нет букв **a** или **b**, получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так обозначение $(a+b)^*c+d(ac^*+)$ описывает множество всех последовательностей из букв **a** и **b** (обозначается $(a+b)^*$), к концу которых присоединена буква **c**, объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы **d**, за которой следует буква **a**, а за ней любое число букв **c** и ещё одним однобуквенным словом (**d** умножить на пустое слово — это **d**).

Слева приведены примеры слов, которые удовлетворяют нашему условию, справа примеры слов, которые не удовлетворяют ему. Благодаря подсветке вы можете видеть, какие из этих примеров и контрпримеров удовлетворяют построенному вами выражению, а какие — нет.

5. Последовательности 2 типа. Распознающая схема (3 балла)

Опишите множество всех последовательностей из букв **a** и **b** таких, что в любом наборе подряд идущих символов (длины больше 1) букв **a** не меньше, чем букв **b**

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок, символизирующих правила, по которым работает эта схема. Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**, выделенном оранжевым. Поступающее на вход слово анализируется посимвольно. При рассмотрении каждого символа мы переходим из текущего состояния по стрелочке, над которой написан этот символ.

После того, как всё слово проанализировано, мы заканчиваем работу в одном из состояний. Некоторые состояния необходимо пометить как конечные (жирная каёмка). Это те состояния, в которых мы оказываемся, проанализировав нужные слова.

6. Машина Тьюринга. Преобразование последовательности (5 баллов)

Постройте машину Тьюринга, которая в любую последовательность из букв **a** и **b** добавляет буквы **a** так, чтобы между любыми буквами **b** было бы хотя бы две буквы **a**.

Например, последовательность **babba** должна превратиться в **baabaaba**

Начальное состояние **s**, конечное **f**

7. Последовательности 3 типа. (Текстовая задача) (4 балла)

В последовательности из букв **a** и **b** в любом наборе подряд идущих символов длины больше 3 количество букв **a** не меньше, чем количество букв **b**.

Докажите, что это условие эквивалентно тому, что в любом наборе из 5 или 7 подряд идущих символов количество букв **a** больше, чем количество букв **b**.

Замечание: эта формулировка содержит неточность. Указанная эквивалентность имеет место для последовательностей хотя бы из 5 символов.

8. Графы (6 баллов)

Постройте граф, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) Из каждой вершины выходит ровно 4 ребра
- 2) В графе нет четырёх вершин, каждые две из которых были бы соединены между собой
- 3) Граф нельзя покрасить в три цвета "правильно", то есть так, чтобы любые две вершины одного цвета были не соединены.

3 балла ставится за пример, ещё 1 балл за доказательство того, что граф удовлетворяет второму и третьему условиям

Ещё 2 балла Вы получите, если Ваш пример минимальный по количеству вершин и Вы это докажете.

9. Мир Тарского (3 балла)

Напишите логическую формулу, описывающую свойство, которым обладает комбинация фишек на левой картинке, но не обладает комбинация на правой.

В формуле используются следующие обозначения:

Фишки обозначаются переменными x , y , z . Простые свойства описываются такими выражениями как "x синяя", "y красная", "x сосед y" (последнее означает, что фишки стоят на различных клетках, у которых есть общая сторона или угол). Для записи более сложных свойств используются логические связки, которые соединяют простые свойства:

И, ИЛИ, НЕ ВЕРНО ЧТО, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ДЛЯ ВСЕХ x , СУЩЕСТВУЕТ x ТАКОЙ, ЧТО (вместо x можно использовать y или z).

Для упорядочения связок используются круглые скобки.

