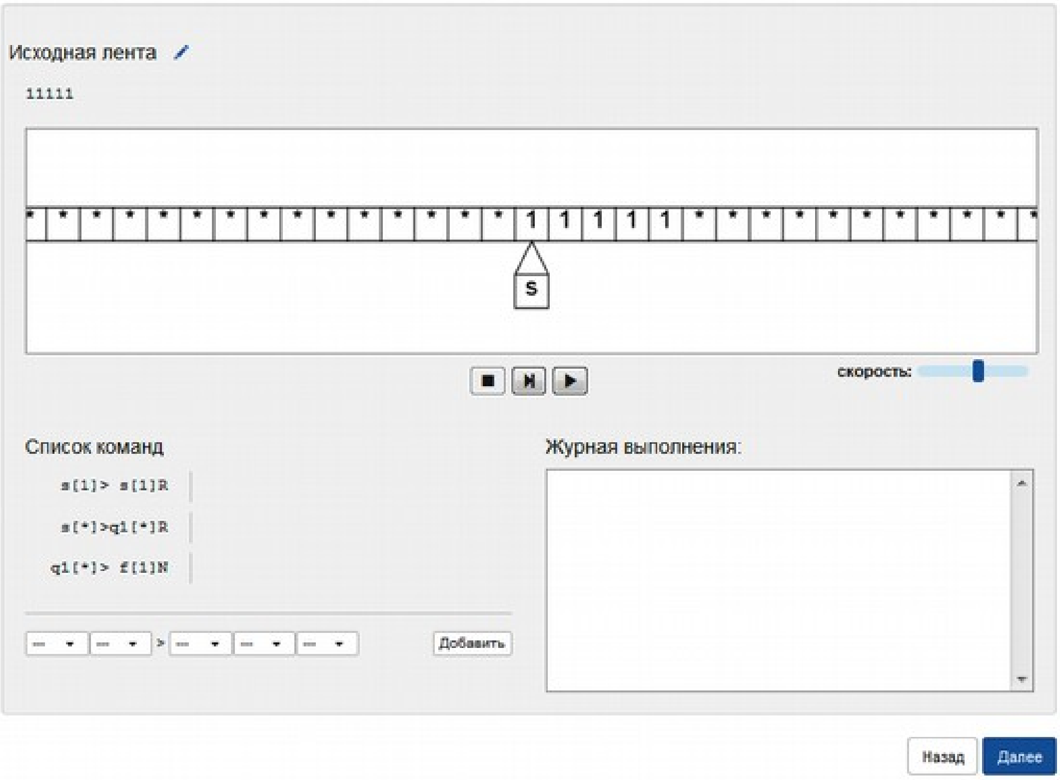
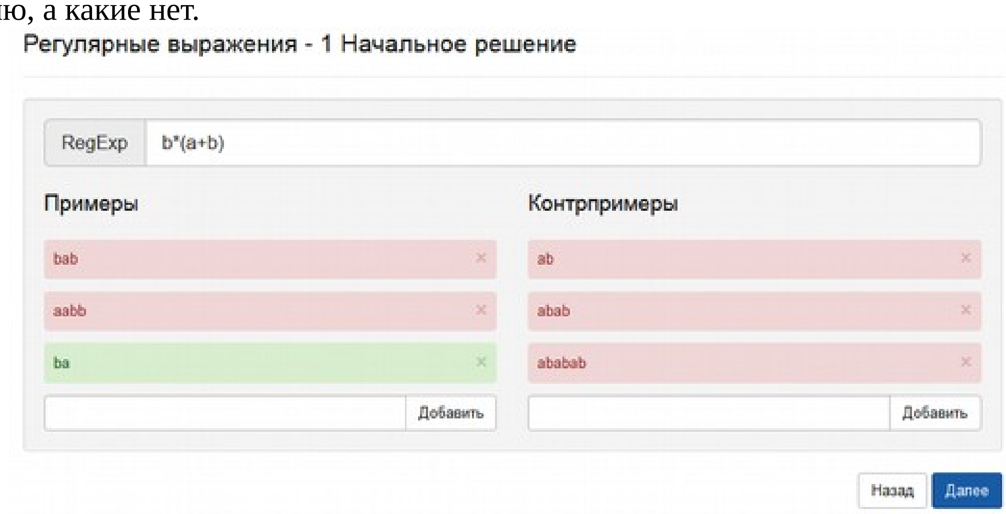
Задачи отборочного тура Олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике с решениями (при решении конструктивных задач участник работает с эмуляторами, в решениях приведены картинки их интерфейсов)

№1 (5 баллов). Постройте машину Тьюринга, копирующую заданную строку из единиц. Исходная строка и копия должны быть разделены пустым символом (звёздочкой). Например, строка *1111* должна превращаться в *1111*1111*.
s — начальное состояние, f — конечное.
В качестве примера введена машина, превращающая набор *1...1* в набор *1...1*1* . Прежде чем создавать свою машину, Вы можете посмотреть, как она работает.



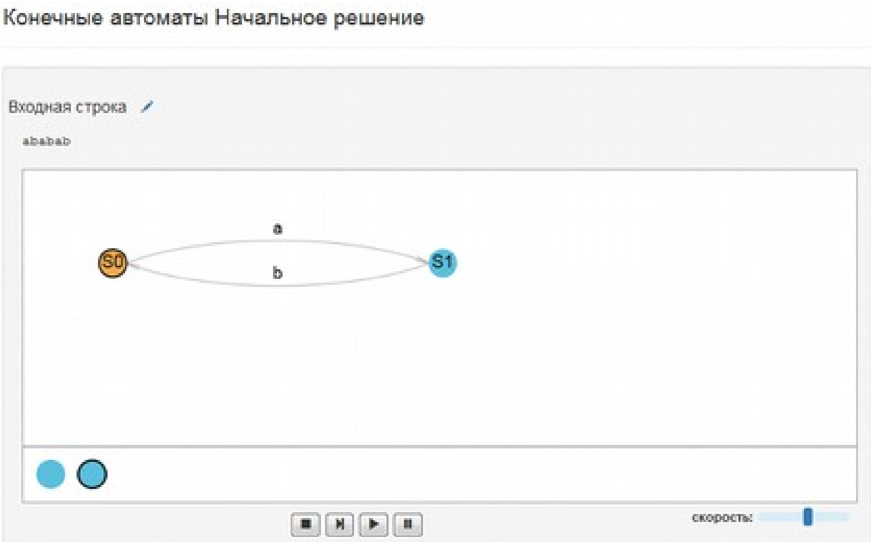
№2 (3 балла). Постройте регулярное выражение, описывающее множество слов из букв a и b, из которого удалены все слова, задаваемые регулярным выражением (ab)*. Постарайтесь, чтобы выражение было как можно короче.
<p>
Регулярные выражения содержат три операции: склейку строк (умножение), выбор одного из двух вариантов (сложение) и итерацию, обозначающуюся звёздочкой. В качестве начального решения приведено выражение b*(a+b). Оно состоит из двух частей — b* обозначает произвольное количество букв b (возможно, ни одной), (a+b) — одну из букв a или b. Ниже, благодаря подсветке цветом, вы можете увидеть, какие слова удовлетворяют этому выражению, а какие нет.



№3 (4 балла). Сколько различных слов задаёт регулярное выражение (a+ab)(b+ab)(a+ab)(b+ab)(a+ab)?
Не забудьте обосновать свой ответ.

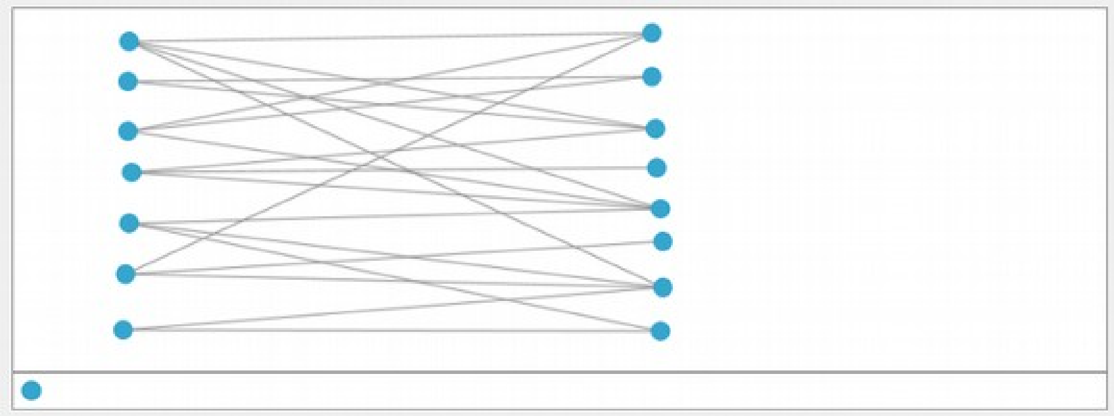
№4 (4 балла)
Ниже изображён автомат, распознающий все слова из букв a и b, задаваемые регулярным выражением (ab)*. Переделайте его так, чтобы он распознавал все слова в этом же алфавите, кроме этих.

Постарайтесь, чтобы автомат содержал как можно меньше состояний.



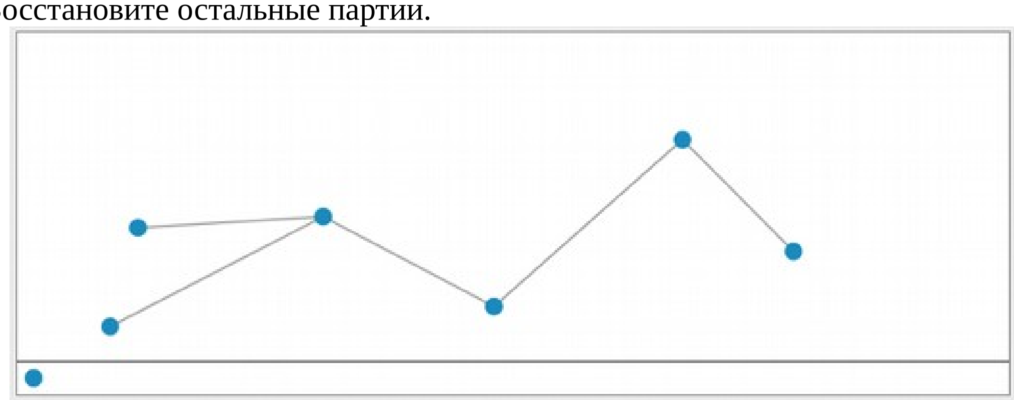
№5 (3 балла)
Посмотрите на картинку. Вершины графа слева изображают школьников одного класса. Вершины справа — предметы, в которых эти школьники показали хорошую осведомленность. Для отправки на олимпиаду нужно выбрать команду из как можно меньшего числа участников, чтобы в ней был специалист по каждому предмету.

Для выбора участников кликните на соответствующие вершины.



№6 (3 балла)
Шесть школьников разбились на две команды, после чего каждый участник одной команды сыграл с каждым участником другой команды партию в настольный теннис. Вершины графа на рисунке изображают школьников, рёбра — сыгранные партии.

На рисунке вы можете видеть часть схемы турнира: всех участников и некоторые сыгранные партии. Восстановите остальные партии.



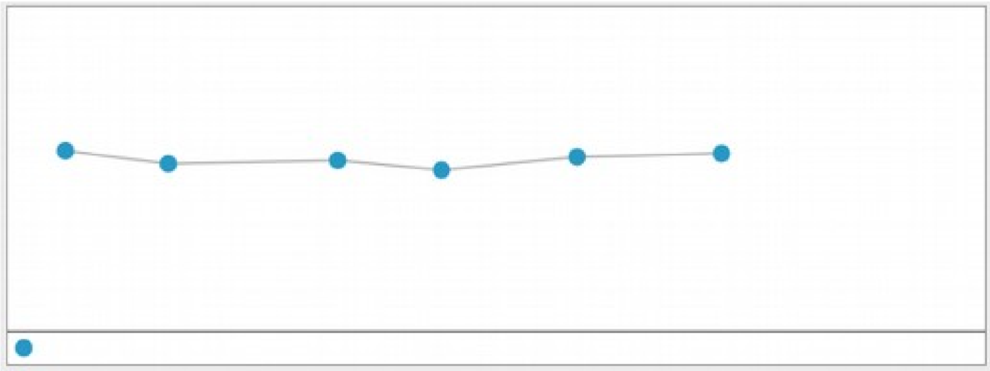
№7 (6 баллов)

Некоторое количество (n) школьников разбились на две команды, после чего каждый участник одной команды сыграл с каждым участником другой команды партию в настольный теннис. Вершины графа на рисунке изображают школьников, рёбра — сыгранные партии.

На рисунке вы можете видеть часть схемы турнира для n = 6: всех участников и некоторые сыгранные партии. В общем случае данная часть схемы выглядит так же: цепочка из n человек, где каждый, кроме последнего, сыграл со следующим и каждый кроме первого сыграл с предыдущим.

Какое количество рёбер (в зависимости от n) нужно добавить в граф, чтобы восстановить схему турнира полностью?

Не забудьте обосновать свой ответ.



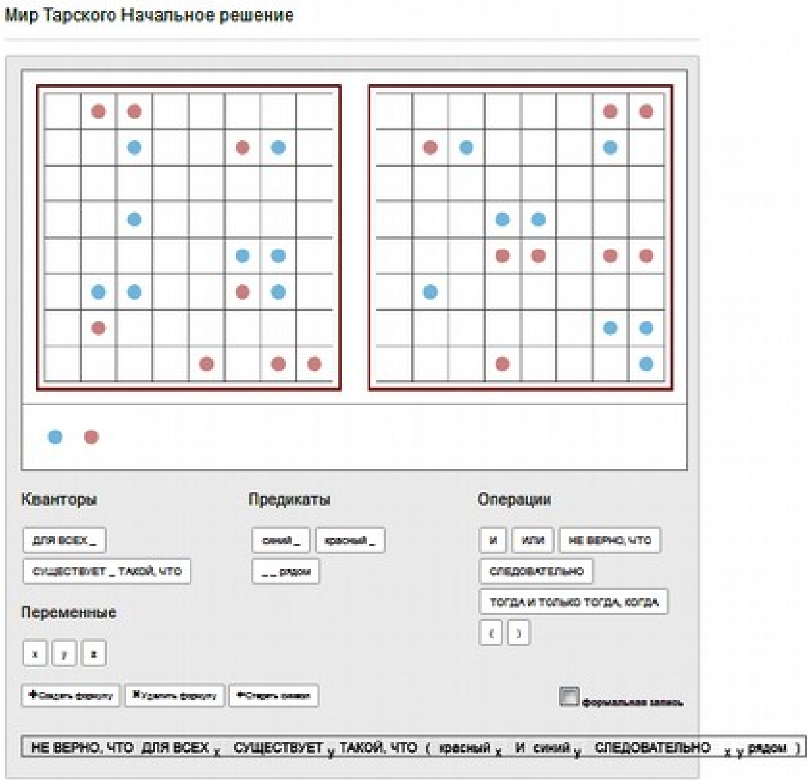
№8 (4 балла)

Фишки называются соседними, если они стоят на различных клетках, у которых есть общая сторона или угол. Это отношение между ними будем обозначать словом "рядом".

Запишите при помощи данных предикатов, кванторов и логических связок формулу исчисления предикатов, которая будет верна для левой картинки и не верна для правой.

Вы можете использовать как неформальную, словесную, так и более математически продвинутую, формальную запись, использующую математические символы: кванторы и знаки операций.

В качестве начального решения введена формула, которая не верна для обоих картинок.



№9 (3 балла)

Создайте с использованием логических элементов AND (И) и OR (ИЛИ) схему, которая возвращает единицу, когда хотя бы 3 из поданных на вход сигналов истинны и ноль в противном случае.