Олимпиада
по дискретной математике и теоретической информатике

очный тур

25 марта 2017 года

Условия и решения задач

1. Логические схемы: «Автомат для голосования»

Назовём ***автоматом для голосования*** нечётного числа n человек логическую схему с n входами, принимающую истинное значение, когда больше половины входов принимают истинные значения, и ложное значение в противном случае.

Это очень естественное определение: если n входов представляют n человек, каждый из которых голосует либо “за” (истинное значение), либо “против” (ложное), на выходе мы получаем вариант, за который проголосовало большинство.

1.1 (3 балла) Постройте автомат для голосования трёх человек, используя логические элементы И и ИЛИ.

1.2. (3 балла)Докажите, что из элементов И и ИЛИ можно построить автомат для голосования любого нечётного числа человек.

1.3. (4 балла) Докажите, что 2^n элементов И и ИЛИ достаточно, чтобы построить автомат для голосования n человек (n – нечётное).

1.4. (4 балла) Имеется логический элемент с тремя входами, который даёт на выходе 1, если число единиц на входе больше числа нулей (реализует функцию голосования для трёх человек).
Постройте автомат для голосования пяти человек, используя только элементы голосования для трёх человек.

1.5. (5 баллов) Имеется логический элемент с тремя входами, который даёт на выходе 1, если число единиц на входе больше числа нулей (реализует функцию голосования для трёх человек).
Докажите, что можно построить автомат для голосования любого нечётного числа человек, используя только элементы голосования для трёх человек.

2. Машина Тьюринга: реализация автомата для голосования

2.1 (4 балла) Постройте машину Тьюринга, на ленте которой в начале работы находится набор из нулей и единиц. После окончания работы на ленте должна быть «1», если число единиц больше числа нулей, «0» — если меньше и «=» в случае равенства. Кроме «0», «1» и «=» можно использовать вспомогательные символы «a» и «b».

В качестве начального решения приведена последовательность команд, удаляющая текущий символ, все символы, находящиеся правее него, сдвигающая на одну позицию влево и возвращающая считывающую головку в начальную позицию.

3. Регулярные выражения: очередь из голосующих

3.1 (3 балла) В очереди на голосование стоят *n* человек. Известно, что рядом с каждым человеком (непосредственно впереди его в очереди или сзади) есть человек, голосующий «за». Докажите, что число человек в очереди, голосующих «за» не менее половины.

3.2 (3 балла) Припишем каждому, стоящему в очереди, «1» или «0», в зависимости от того, голосует он «за» или «против». Известно, что рядом с каждым человеком (непосредственно впереди его в очереди или сзади) есть человек, голосующий «за». Постройте регулярное выражение описывающее все такие наборы из 0 и 1 или докажите, что это невозможно.

4. Конечные автоматы: очередь из голосующих

4.1 (3 балла) Припишем каждому, стоящему в очереди, «1» или «0», в зависимости от того, голосует он «за» или «против». Известно, что рядом с каждым человеком (непосредственно впереди его в очереди или сзади) есть человек, голосующий «за». Постройте конечный автомат, распознающий все такие наборы из «0» и «1» или докажите, что это невозможно.

5. Мир Тарского.

5.1. (3 балла)Запишите при помощи языка исчисления предикатов утверждения, что рядом с каждым человеком в очереди стоит кто-то, голосующий "за". На картинке синий цвет обозначает человека, голосующего «за», красный — голосующего «против».

5.2 (6 баллов)Докажите, что количество различных выражений, описывающих очереди для голосования, которые можно составить при помощи предикатов "за", "против" и "рядом", двух переменных *x* и *y*, кванторов и логических связок, не превышает $2^{2^{18}+15}$. (Выражения считаются одинаковыми, если для каждой очереди их значения совпадают).

6. Графы.

В классе 9 человек, которые изучают некоторое количество предметов. Каждый предмет хорошо знают ровно три человека. Для участия в многопредметной олимпиаде хочется выбрать команду, в которой были бы знатоки всех предметов.
Ясно, что если количество предметов не превосходит 3, наименьшее число членов команды, которое можно гарантировать не зная распределения учеников по предметам совпадает с числом предметов.

6.1. (5 баллов) Постройте пример класса из 9 человек и некоторого количества предметов, для которого нельзя выбрать 3 человек, так, чтобы каждый предмет был известен хотя бы одному из них.
Объясните, почему Ваш пример удовлетворяет этому условию.
Чем меньше количество предметов, тем выше будет оценка.

6.2 (5 баллов) А для какого наименьшего количества предметов может не хватить 3 участников?