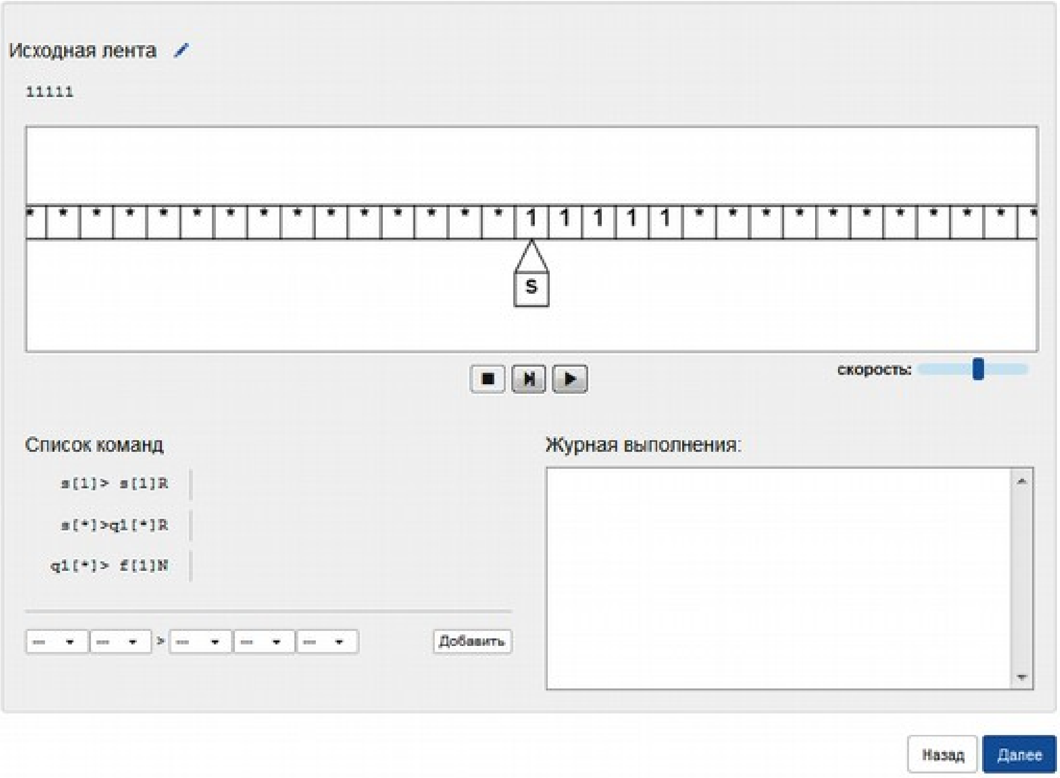
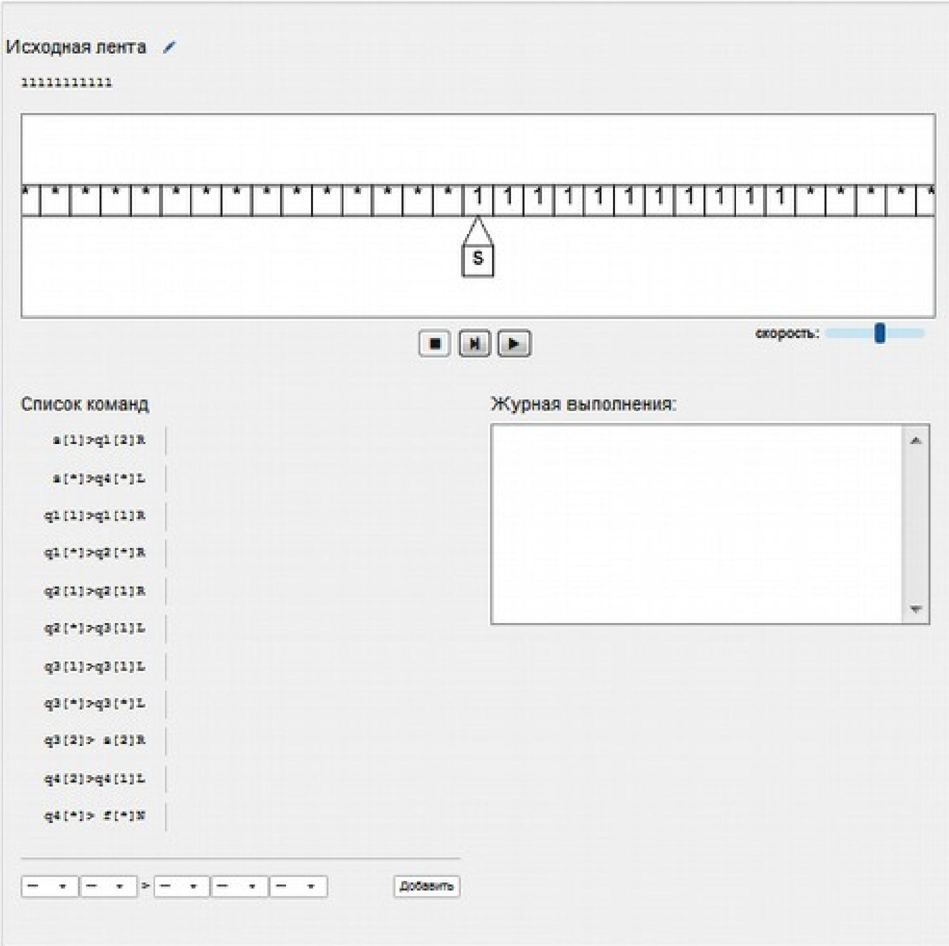
Задачи отборочного тура Олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике с решениями (при решении конструктивных задач участник работает с эмуляторами, в решениях приведены картинки их интерфейсов)

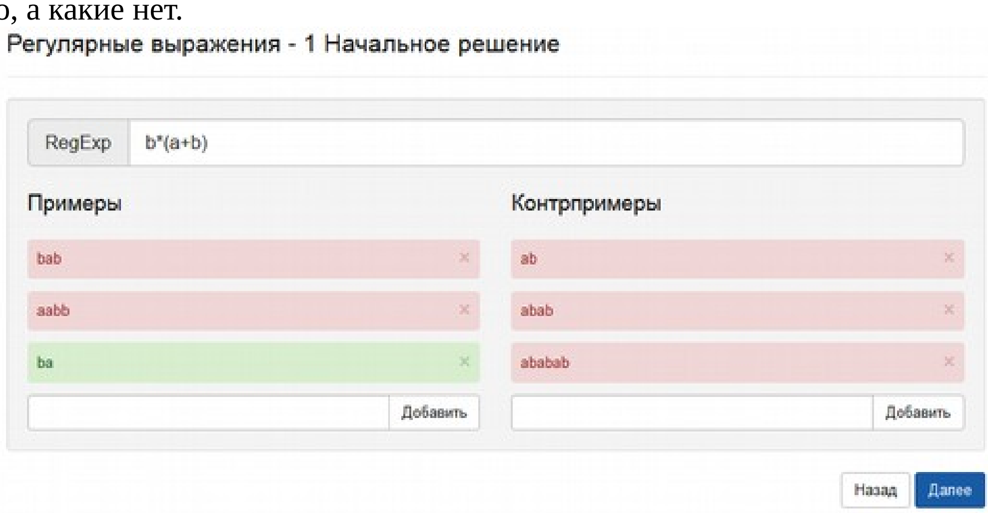
№1 (5 баллов). Постройте машину Тьюринга, копирующую заданную строку из единиц. Исходная строка и копия должны быть разделены пустым символом (звёздочкой). Например, строка *1111* должна превращаться в *1111*1111*.
s — начальное состояние, f — конечное.
В качестве примера введена машина, превращающая набор *1...1* в набор *1...1*1* . Прежде чем создавать свою машину, Вы можете посмотреть, как она работает.



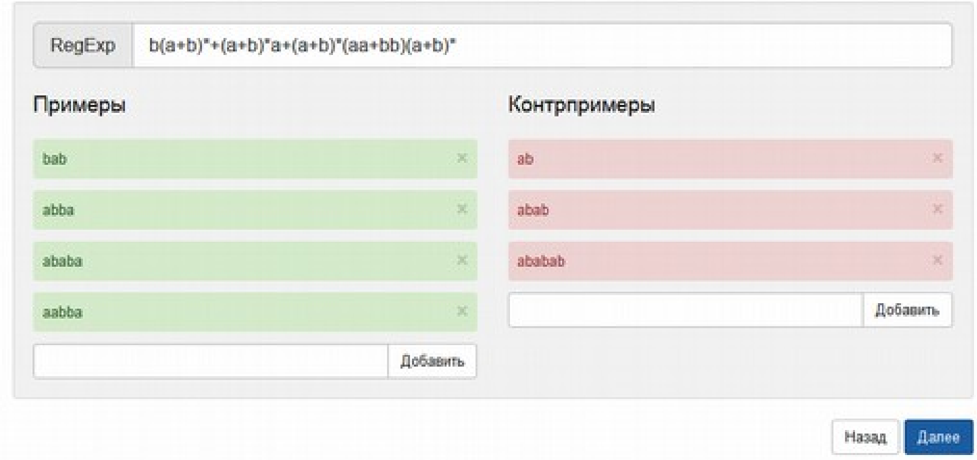
Решение
Когда мы копируем строку, нам важно понимать, какие элементы мы уже скопировали, а какие ещё нет. Поэтому уже скопированные единицы мы будем "помечать" используя для этого вспомогательный символ 2.
Как работает наша машина:
s[1]>q1[2]R - если мы встречаем единицу в начальном состоянии, мы заменяем её на двойку и начинаем движение направо.
q1[1]>q1[1]R, q1[*]>q2[*]R, q2[1]>q2[1]R - эти правила отвечают за движение управляющего элемента направо до второй встреченной звездочки (когда мы встречаем первую звездочку, это отмечается переходом из состояния q1 в состояние q2.
q2[*]>q3[*]L - мы находим вторую звёздочку, заменяем её на единицу и начинаем движение налево.
q3[1]>q3[1]L, q3[*]>q3[*]L, q3[2]>s[2]R - аналогично предыдущей группе правил, движемся налево до тех пор, пока не встретим двойку. Встретив двойку, мы возвращаемся в начальное состояние s и начинаем искать следующую единицу. Если мы её нашли, мы возвращаемся обратно к первому правилу и повторяем процесс заново.
Если следующая единица не обнаружена, выполняется правило s[*]>q4[*]L - процесс копирования окончен, но все исходные единицы у нас заменены двойками, и надо вернуть их в исходное состояние. Это делается при помощи правила q4[2]>q4[2]L.
Наконец, когда мы в состоянии q4 встречаем звёздочку, правило q4[*]>f[*]N говорит нам закончить работу.



№2 (3 балла). Постройте регулярное выражение, описывающее множество слов из букв a и b, из которого удалены все слова, задаваемые регулярным выражением (ab)*. Постарайтесь, чтобы выражение было как можно короче.
<p>
Регулярные выражения содержат три операции: склейку строк (умножение), выбор одного из двух вариантов (сложение) и итерацию, обозначающуюся звёздочкой. В качестве начального решения приведено выражение b*(a+b). Оно состоит из двух частей — b* обозначает произвольное количество букв b (возможно, ни одной), (a+b) — одну из букв a или b. Ниже, благодаря подсветке цветом, вы можете увидеть, какие слова удовлетворяют этому выражению, а какие нет.



Решение
Если слово не удовлетворяет регулярному выражение (ab)*, т.е. не имеет вид abab...ab, это значит, что или это слово начинается на b, или заканчивается на a, или содержит две одинаковые буквы подряд. За первый случай отвечает первое слагаемое в формуле, за второй - второе, за третий — третье.



№3 (4 балла). Сколько различных слов задаёт регулярное выражение (a+ab)(b+ab)(a+ab)(b+ab)(a+ab)?
Не забудьте обосновать свой ответ.

Решение
Каждая скобочка может принимать два возможных значения, значит, всего получается 32 варианта. Однако некоторые слова таким образом оказываются построены два раза. Посчитаем такие слова.

Допустим, для некоторого слова существует два варианта задания нашим регулярным выражением. Во-первых, заметим, что у этих вариантов должно совпадать значение последнего множителя (скобки): a или ab. В противному случае у этих вариантов просто не совпадает последняя буква.

Пусть у них теперь не совпадает первая скобка, т.е. у одного из них первый множитель это a, а у второго ab. Это автоматически определяет вторую скобку в первом варианте: должно получаться b. Значение третьей скобки в первом варианте обязательно начинается с a, что автоматические определяет значение второй скобки во втором варианте: это ab.

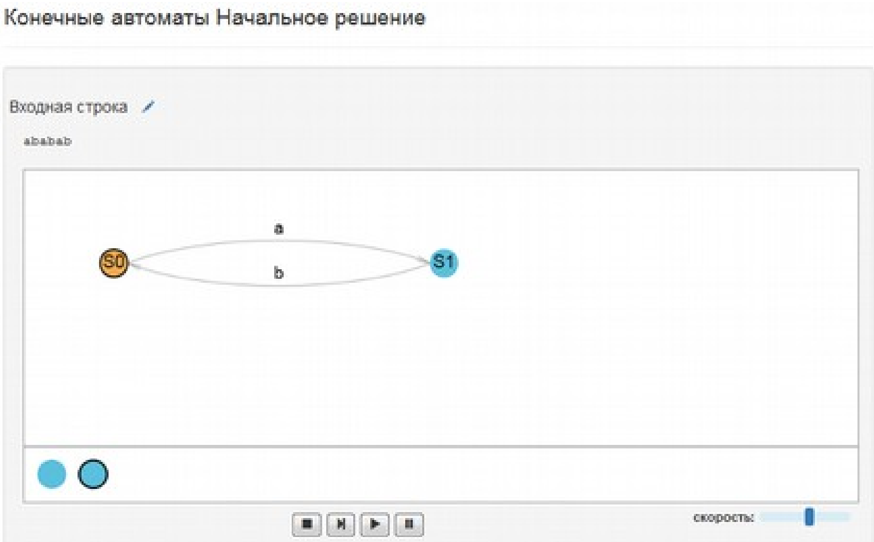
Далее замечаем, что чтобы два способа раскрытия скобок задавали одно слово, необходимо, в этих способах одинаковое количество скобок раскрывалось "коротким" способом, как a или b и одинаковое количество "длинным" способом, как ab. Поскольку в первом варианте уже две скобки раскрыты "коротким" способом, а во втором - "длинным", а пятая скобка должна раскрываться одинаково, это автоматически определяет значения третей и четвёртой скобок в обоих вараинтах: ab и abab. Таким образом, мы получаем два слова, задающиеся двумя способами: это abababab и abababa.

Если же в наших вариантах совпадает первая скобка, то должна совпадать и вторая, т.к. её значения начинаются с разных букв. Таким образом, остаются только третья и четвёртая скобки. Рассматривая их аналогично первой и второй, легко убедиться, что они принимают одинаковые значения.

Значит, только два слова задаются двумя способами, остальные одним. Таким образом, ответ в этой задаче 32 - 2 = 30.

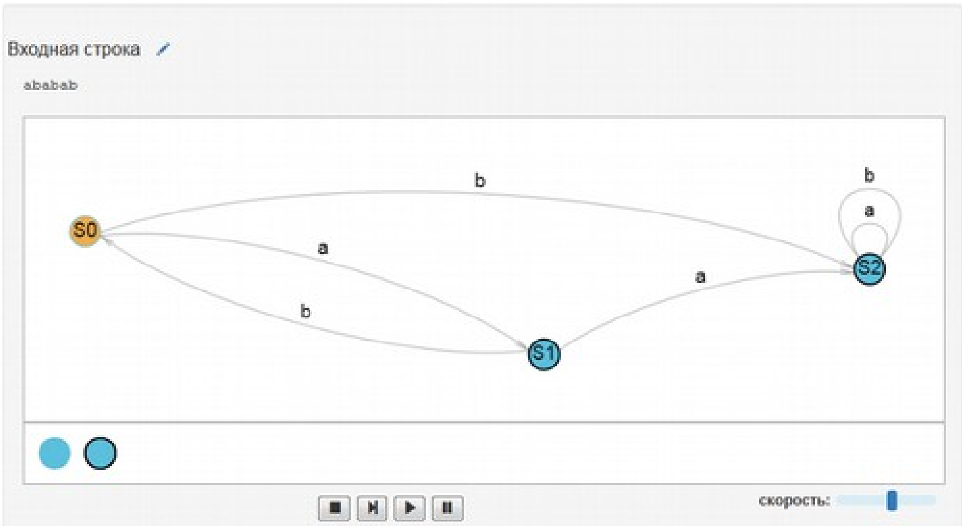
№4 (4 балла)
Ниже изображён автомат, распознающий все слова из букв a и b, задаваемые регулярным выражением (ab)*. Переделайте его так, чтобы он распознавал все слова в этом же алфавите, кроме этих.

Постарайтесь, чтобы автомат содержал как можно меньше состояний.



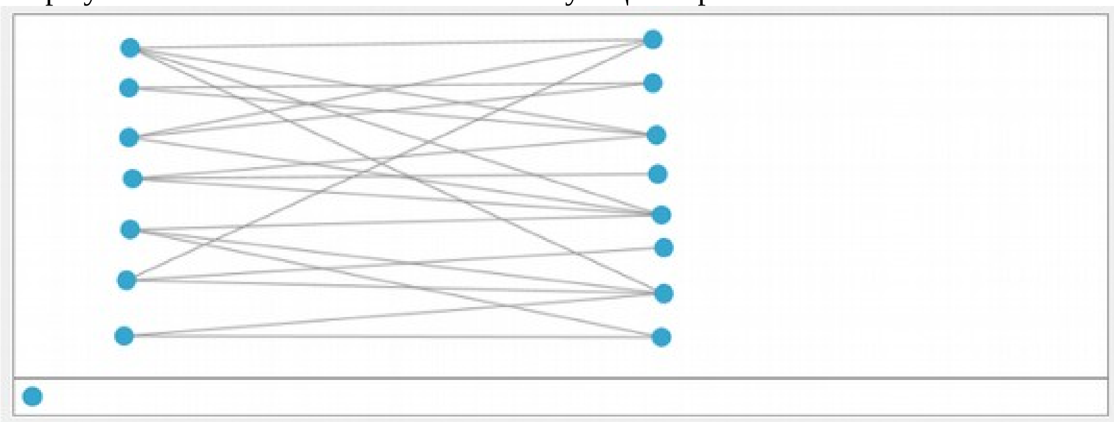
Решение
Возьмём за основу предложенный в начальном решении автомат. Когда он заканчивает работу в состоянии S0 это значит, что строка распозналась, а когда в S1 - что не распозналась. Нам же сейчас нужно сделать всё наоборот, поэтому S0 перестаёт быть конечным состоянием, зато им становится S1.

Кроме того, исходный автомат вообще не обрабатывал слова, к которых буквы a и b не чередовались. Теперь нам нужны эти слова, поэтому надо добавить их обработку. Как только мы в состоянии S0 встречаем букву b или в состоянии S1 букву a, это сразу означает, что нам встретилось нужное слово вне зависимости от того, что будет дальше. Поэтому в этом случае мы переходим в конечное состояние S2, которое уже не покидаем.



№5 (3 балла)
Посмотрите на картинку. Вершины графа слева изображают школьников одного класса. Вершины справа — предметы, в которых эти школьники показали хорошую осведомленность. Для отправки на олимпиаду нужно выбрать команду из как можно меньшего числа участников, чтобы в ней был специалист по каждому предмету.

Для выбора участников кликните на соответствующие вершины.

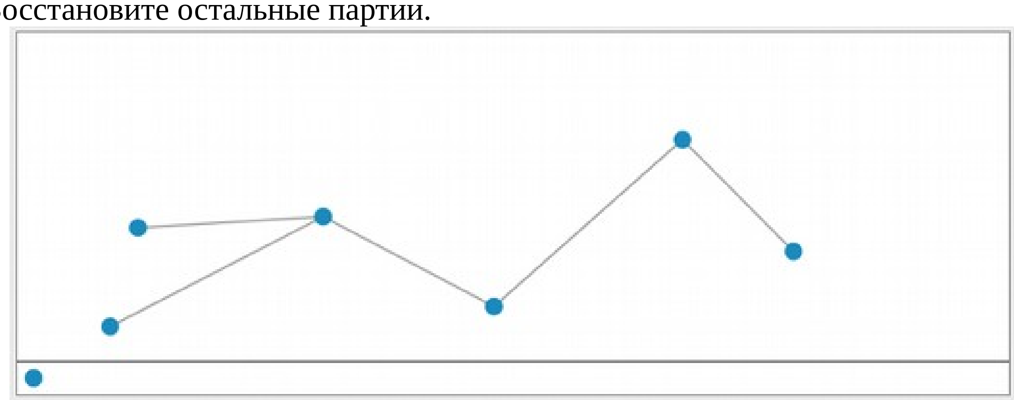


Решение
Заметим, что четвёртая и шестая вершина в правой доле (четвёртый и шестой предметы) соединены каждая ровно с одной вершиной в левой доле (каждый из этих двух предметов известен ровно одному ученику). Значит, эти вершины (ученики) обязательно должны быть взяты в команду.

Выбранные два ученика покрывают все предметы, кроме второго и седьмого. Но для второго и седьмого предметов не существует общего ученика, которому они оба были бы известны. Значит, минимальное необходимое количество учеников - четыре. Подходят, например, второй, четвёртый, шестой и седьмой ученики.

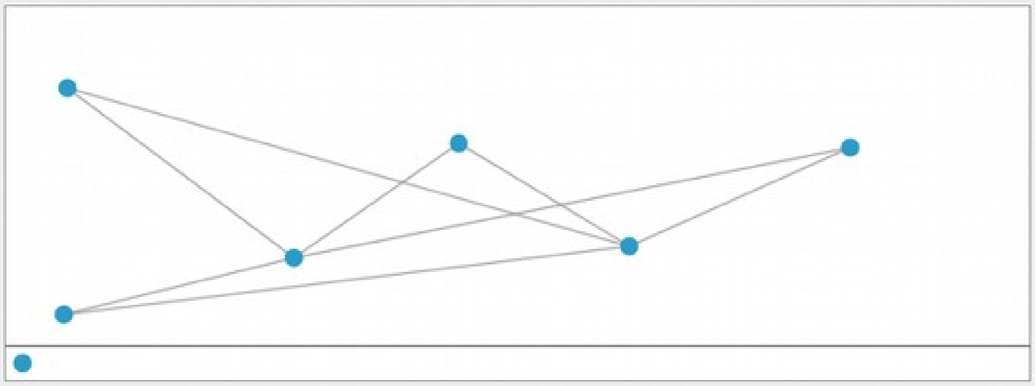
№6 (3 балла)
Шесть школьников разбились на две команды, после чего каждый участник одной команды сыграл с каждым участником другой команды партию в настольный теннис. Вершины графа на рисунке изображают школьников, рёбра — сыгранные партии.

На рисунке вы можете видеть часть схемы турнира: всех участников и некоторые сыгранные партии. Восстановите остальные партии.



Решение

Рассмотрим вершину степени 3 (человека, который сыграл с тремя другими). Он должен быть в одной команде, эти трое - в другой. Тот кто сыграл с одним из этих троих обязан быть в команде с первым рассмотренным человеком, тогда последний человек обязан быть во второй команде. Получаем одну команду из четырёх человек, а вторую из двух.



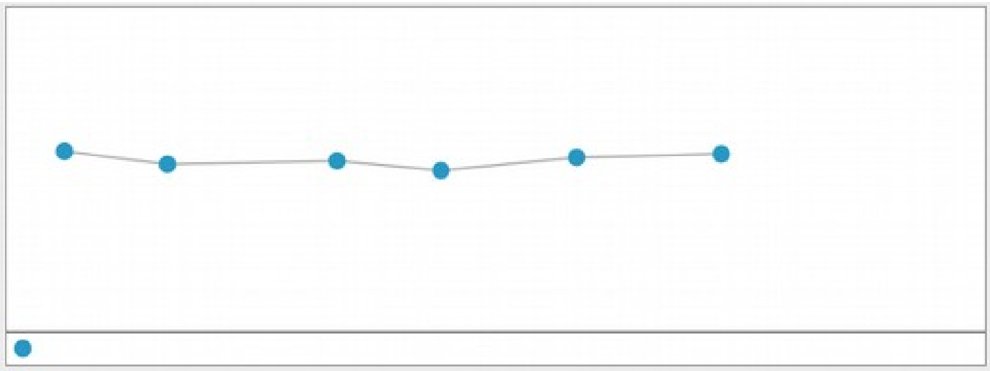
№7 (6 баллов)

Некоторое количество (n) школьников разбились на две команды, после чего каждый участник одной команды сыграл с каждым участником другой команды партию в настольный теннис. Вершины графа на рисунке изображают школьников, рёбра — сыгранные партии.

На рисунке вы можете видеть часть схемы турнира для n = 6: всех участников и некоторые сыгранные партии. В общем случае данная часть схемы выглядит так же: цепочка из n человек, где каждый, кроме последнего, сыграл со следующим и каждый кроме первого сыграл с предыдущим.

Какое количество рёбер (в зависимости от n) нужно добавить в граф, чтобы восстановить схему турнира полностью?

Не забудьте обосновать свой ответ.

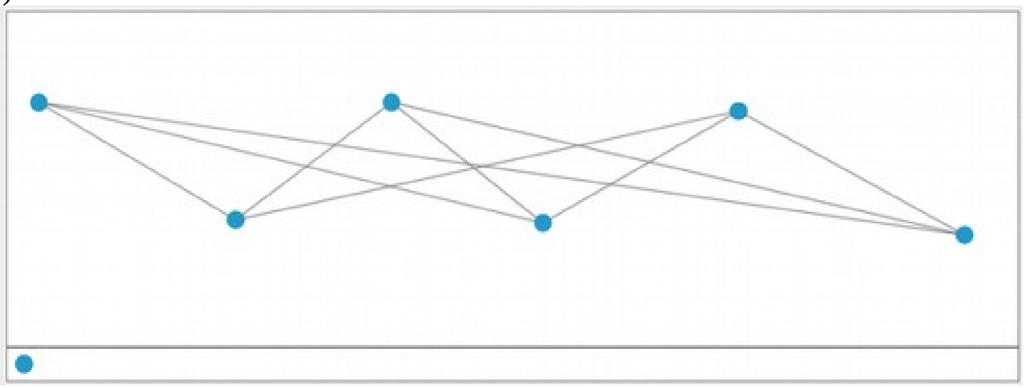


Решение

На рисунке приведёна полная схема турнира для 6 человек. Легко посчитать, что в ней 9 рёбер, т.е. добавить надо 4 ребра.

В общем случае вершины цепочки можно пронумеровать начиная с одного из краёв. Понятно, что вершины с чётными номерами должны быть в одной команде, а вершины с нечётными номерами - в другой. В случае, если n чётно, получаем таким образом две команды по n/2 человек, в случае нечётного n - одну команду из (n - 1)/2 человек, другую из (n + 1)/2.

В исходном графе n - 1 ребро. Количество рёбер в полном двудольном графе вычисляется как произведение количества вершин в одной доле (людей в одной команде) на количество вершин в другой доле (людей в другой команде). Для случая чётного n в соответствующем полном двудольном графе $n^2/4$ рёбер, значит, добавить необходимо $n^2/4 - n + 1$ ребро, что можно также представить как $(n-2)^2/4$. В случае нечётного n итоговое количество рёбер это $(n^2-1)/4$, добавить необходимо $(n^2 - 1)/4 - n + 1$ ребро, что также можно представить как $(n-1)(n - 3)/4$



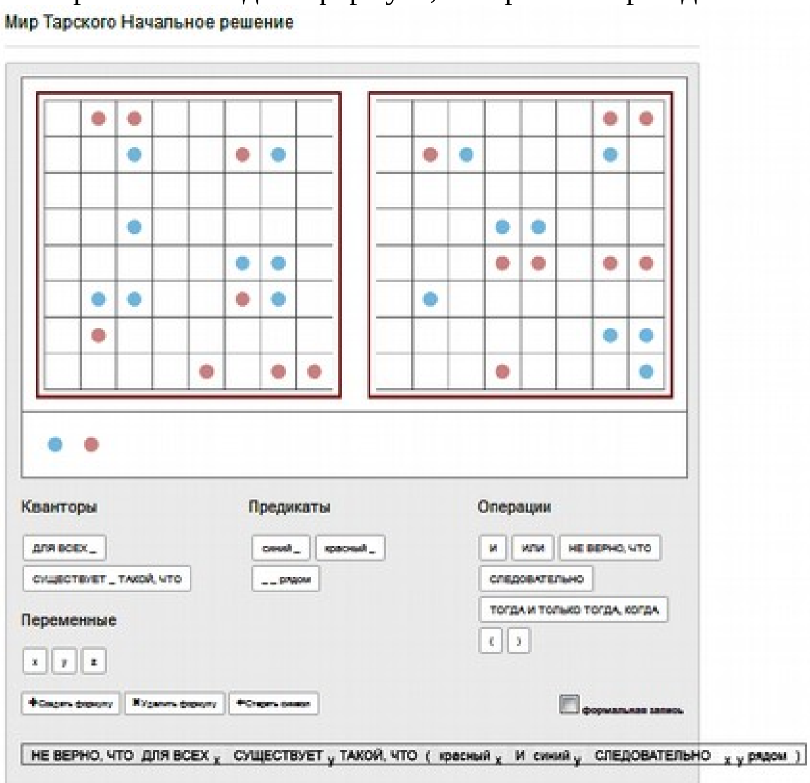
№8 (4 балла)

Фишки называются соседними, если они стоят на различных клетках, у которых есть общая сторона или угол. Это отношение между ними будем обозначать словом "рядом".

Запишите при помощи данных предикатов, кванторов и логических связок формулу исчисления предикатов, которая будет верна для левой картинки и не верна для правой.

Вы можете использовать как неформальную, словесную, так и более математически продвинутую, формальную запись, использующую математические символы: кванторы и знаки операций.

В качестве начального решения введена формула, которая не верна для обоих картинок.



Решение

Заметим, что данные картинки довольно похожи, то есть большая часть утверждений будет либо верна для обеих картинок, либо же неверна для обеих.

Самое заметное отличие между картинками - наличие на левой картинке блока из нескольких (больше одной) синих вершин, не соединённых с красными) которого нет на правой. Высказывание "Для любой синей вершины существует красный сосед" не проходит, так как одинокая синяя вершина на левой картинке всё же есть. А вот высказывание "Для любых двух соседних синих вершин есть общая соседняя красная" - как раз то, что нам нужно.

ДЛЯ ВСЕХ x ДЛЯ ВСЕХ y (синий x И синий y И x y рядом СЛЕДОВАТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЕТ z ТАКОЙ, ЧТО (красный z И x z рядом И y z рядом))

№9 (3 балла)

Создайте с использованием логических элементов AND (И) и OR (ИЛИ) схему, которая возвращает единицу, когда хотя бы 3 из поданных на вход сигналов истинны и ноль в противном случае.

Решение

У нас есть три истинных сигнала, т.е. не более одного ложного. Этот ложный сигнал, если он есть, находится либо среди первых двух сигналов, либо среди двух последних. Т.е. истинны или первые два сигнала вместе и хотя бы один из оставшихся (этому случаю соответствует верхняя часть схемы) или, наоборот, последние два сигнала и хотя бы один из двух первых (нижняя часть схемы). Наконец, между этими случаями надо поставить ИЛИ.