Олимпиада
по дискретной математике и теоретической информатике

очный тур

25 марта 2017 года

Условия и решения задач

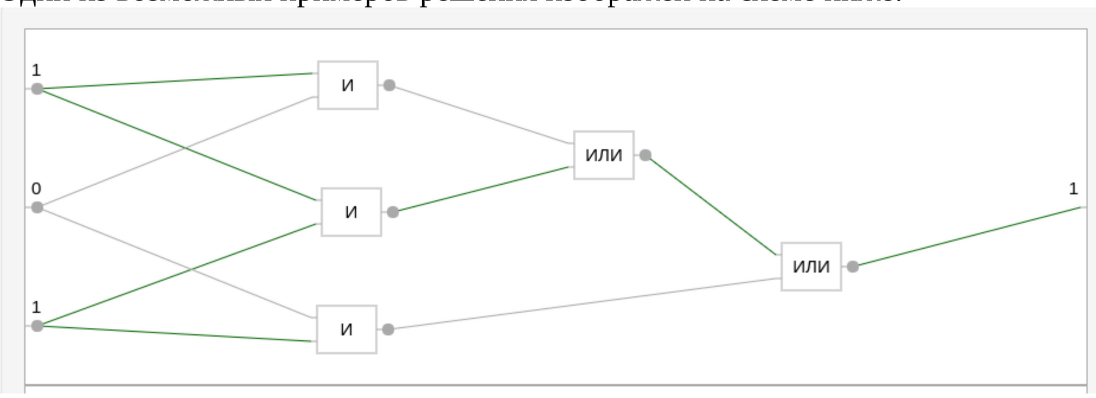
1. Логические схемы: «Автомат для голосования»

Назовём ***автоматом для голосования*** нечётного числа *n* человек логическую схему с *n* входами, принимающую истинное значение, когда больше половины входов принимают истинные значения, и ложное значение в противном случае.

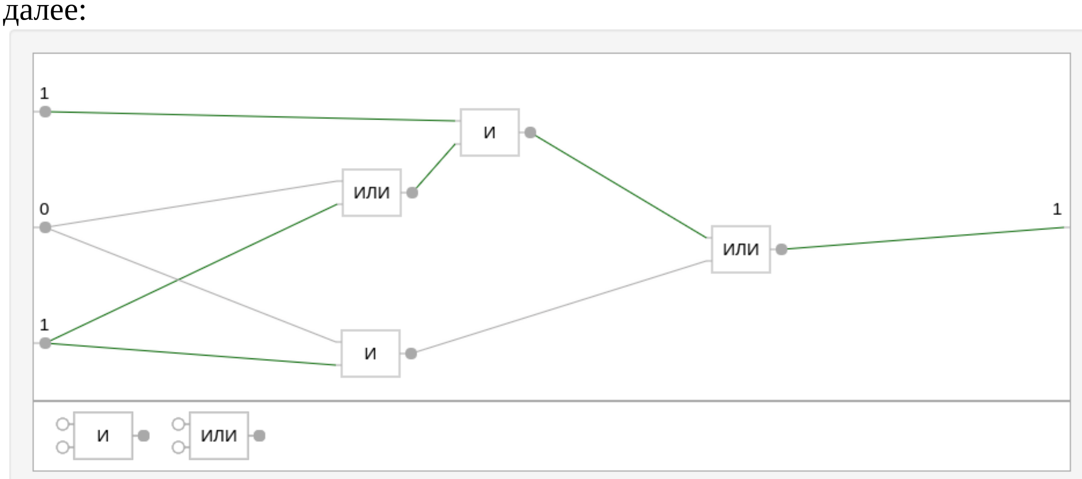
Это очень естественное определение: если *n* входов представляют *n* человек, каждый из которых голосует либо “за” (истинное значение), либо “против” (ложное), на выходе мы получаем вариант, за который проголосовало большинство.

1.1 (3 балла) Постройте автомат для голосования трёх человек, используя логические элементы И и ИЛИ.

Решение:
Один из возможных примеров решения изображён на схеме ниже:



Также на схеме видно, как работает этот элемент на конкретном наборе значений (ИСТИНА, ЛОЖЬ, ИСТИНА).
Мы перебираем все возможные пары входов и, если хотя бы на одном из них принимается истинное значение, логическая схема выдаёт истинный результат.
Более экономный, с точки зрения количества используемых символов, пример приведён далее:



Данная схема построена из следующих соображений: если первый вход принимает истинное значение, нам достаточно истинности любого из двух оставшихся; в противном случае требуется истинность обоих оставшихся.

1.2. (3 балла)Докажите, что из элементов И и ИЛИ можно построить автомат для голосования любого нечётного числа человек.

Решение:
Пусть количество человек равно $2m$-1, где m натуральное число. Проще всего построить такую схему из тех же соображений, из которых был построен пример №1 в предыдущей задаче: переберём все возможные наборы по m входов, объединив каждый из наборов при помощи элементов И. Затем соединим полученные части схемы при помощи элементов ИЛИ.[i]

1.3. (4 балла) Докажите, что 2^n элементов И и ИЛИ достаточно, чтобы построить автомат для голосования n человек (n – нечётное).

Решение:
Докажем более общее утверждение: для любых натуральных n и k обозначим через $F(n, k)$ логическую схему, дающую на выходе истинное значение тогда и только тогда, когда хотя бы k входов принимают истинные значения; тогда эта схема может быть построена с использованием не более чем 2^n - 2 элементов И и ИЛИ.
Докажем это утверждение по индукции. В качестве базы возьмём $n = 2$. Тогда
F (2, 1) = x_1 ИЛИ x_2; F (2, 2) = x_1 И x_2. Требуется 1 элемент, что не превосходит 2^2-2=2.
Индукционный переход от n к n+1: при $k = 1$ достаточно использовать n элементов ИЛИ, что меньше требуемой оценки.
При $k > 1$ заметим, что $F(n+1, k)$ = (x_n+1 И $F(n, k-1)$) ИЛИ $F(n, k)$. Здесь мы использовали две схемы предыдущего порядка, содержащие по индукционному предположению не более 2^n-2 элементов каждая, и ещё два дополнительных элемента. Всего получаем не более 2^{n+1}-2 элементов, что и требовалось доказать.

1.4. (4 балла) Имеется логический элемент с тремя входами, который даёт на выходе 1, если число единиц на входе больше числа нулей (реализует функцию голосования для трёх человек).
Постройте автомат для голосования пяти человек, используя только элементы голосования для трёх человек.

Решение:
Пронумеруем голосующих числами от 1 до 5. Возьмём элементы для голосования трёх человек с номерами 1, 2 и 3; 1, 2 и 4; 1, 2 и 5. Выходы каждого из этих элементов отождествим с входами четвёртого элемента для голосования трёх человек. Заметим, что полученная схема выдаёт верный результат для голосования пяти человек для всех ситуаций, кроме двух: когда люди с номерами 1 и 2 голосуют «за», а остальные трое «против», и обратной ситуации.
Создадим ещё две аналогичных схемы: схему, которая «ошибается» только при распределении голосующих 2 и 3 против 1, 4 и 5 и схему, которая «ошибается» при распределении 4 и 5 против 1, 2 и 3. Заметим, что хотя бы две из этих схем будут давать правильный результат при любом распределении голосов. Значит, если мы замкнём их выходы на вход ещё одного элемента для голосования трёх человек, полученный результат всегда будет верен.

1.5. (5 баллов) Имеется логический элемент с тремя входами, который даёт на выходе 1, если число единиц на входе больше числа нулей (реализует функцию голосования для трёх человек).
Докажите, что можно построить автомат для голосования любого нечётного числа человек, используя только элементы голосования для трёх человек.

Решение:
Докажем это по индукции. База $n = 3$ содержится в условии.

Для перехода от $2n$-1 к $2n$+1 воспользуемся индукционным предположением. Рассмотрим следующие элементы для голосования $2n$-1 человека: все, кроме первого и второго; все, кроме второго и третьего и все, кроме первого и третьего человека.. Выходы каждого из этих элементов отождествим с входами четвёртого элемента для голосования трёх человек. Полученная схема почти всегда будет давать результат, совпадающий с голосованием большинства. Единственное исключение — ситуация, в которой большинство состоит ровно из n+1 человека и в это большинство входят одновременно люди с номерами 1, 2 и 3. Создадим ещё две аналогичных схемы, которые «ошибаются» в других ситуациях. Тогда, если мы замкнём их выходы на вход ещё одного элемента для голосования трёх человек, полученный результат всегда будет верен.

2. Машина Тьюринга: реализация автомата для голосования

2.1 (4 балла) Постройте машину Тьюринга, на ленте которой в начале работы находится набор из нулей и единиц. После окончания работы на ленте должна быть «1», если число единиц больше числа нулей, «0» — если меньше и «=» в случае равенства. Кроме «0», «1» и «=» можно использовать вспомогательные символы «a» и «b».

В качестве начального решения приведена последовательность команд, удаляющая текущий символ, все символы, находящиеся правее него, сдвигающая на одну позицию влево и возвращающая считывающую головку в начальную позицию.

Решение:
Приведённую в качестве начального решения последовательность команд назовём вспомогательной машиной T1.

Принцип построения машины:
Машина анализирует первый символ и заменяет его на символ «a». Затем считывающая головка сдвигается направо, пока не встретится противоположный символ. После этого применяется машина T1. Таким образом, мы удалили из ленты найденный символ и вернулись к первому символ. Снова применим машину T1, удалив и его. Таким образом, на ленте стало на одну единицу и на один ноль меньше. В случае, если на ленте не осталось символов одного вида, удаляем все символы, кроме одного. В случае, если лента в какой-то момент оказалась пуста, пишем знак равенства.

В данном решении использован только один вспомогательный символ. Однако, существуют другие решения, где эти символы нужны оба.

3. Регулярные выражения: очередь из голосующих

3.1 (3 балла) В очереди на голосование стоят *n* человек. Известно, что рядом с каждым человеком (непосредственно впереди его в очереди или сзади) есть человек, голосующий «за». Докажите, что число человек в очереди, голосующих «за» не менее половины.

Решение:
Сопоставим каждому человеку, голосующему «против», своего человека, голосующего «за»: если у него есть единственный сосед, голосуюший «за», сопоставим его; если таких соседей двоё, сопоставим любого, для определённости — того, кто стоит перед ним. Заметим, что мы не могли сопоставить одного и того же голосующего «за» двум разным людям, голосующим «против», поскольку это бы значило, что у этого голосующего «за» оба соседа в очереди голосуют «против», что противоречит условию. Значит, действительно, каждому голосующему «против» сопоставлен свой человек, голосующий «за». Таким образом, количество голосующих «за» не меньше, чем количество голосующих «против».

3.2 (3 балла) Припишем каждому, стоящему в очереди, «1» или «0», в зависимости от того, голосует он «за» или «против». Известно, что рядом с каждым человеком (непосредственно впереди его в очереди или сзади) есть человек, голосующий «за». Постройте регулярное выражение описывающее все такие наборы из 0 и 1 или докажите, что это невозможно.

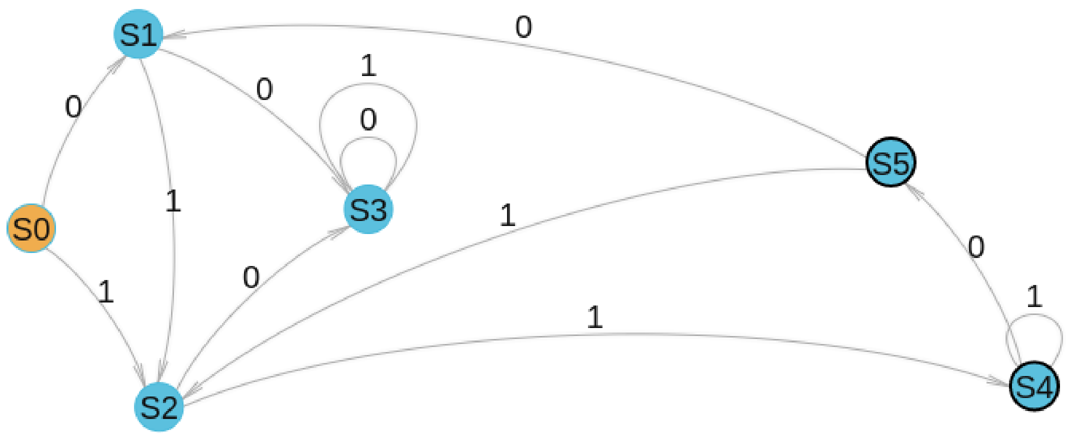
Решение:
(011+11)(1*(0011+011))*1*(1*+0) или **(011+11)(1*(0011+011))*1*(_+0)**? Где «**_**» обозначает пустое слово.

Действительно, последовательность начинается либо с **011**, если первый человек голосует против, либо с **11**, если первый человек голосует «за». После этого может идти любое количество людей, голосующих «за», потом один или два человека «против» и снова двое людей «за». Эта ситуация повторяется вплоть до конца очереди, где опять может стоять человек, голосующий против.

4. Конечные автоматы: очередь из голосующих

4.1 (3 балла) Припишем каждому, стоящему в очереди, «1» или «0», в зависимости от того, голосует он «за» или «против». Известно, что рядом с каждым человеком (непосредственно впереди его в очереди или сзади) есть человек, голосующий «за». Постройте конечный автомат, распознающий все такие наборы из «0» и «1» или докажите, что это невозможно.

Решение:
Это возможно: подходит автомат, распознающий выражение из решения задачи 3.2



S0 — начальное состояние
S1 — состояние, в котором текущий символ 0, а за ним обязательно должна стоять единица (либо начальный 0 в строке, либо второй 0 в паре подряд идущих нулей)
S2 — состояние, в котором текущий символ 1, а предыдущий — не 1 (либо 0, либо отсутствует). Требуется ещё одна 1.
S3 — состояние, в которое мы попадаем, когда встречаем человека, противоречащего условию (00..., 10..., ...000... или ...010...). Выбраться из этого состояния невозможно.
S4 и S5 — конечные состояния, соответствующие корректным строкам, заканчивающимся на 1 и 0 соответственно.

5. Мир Тарского.

5.1. (3 балла)Запишите при помощи языка исчисления предикатов утверждения, что рядом с каждым человеком в очереди стоит кто-то, голосующий "за". На картинке синий цвет обозначает человека, голосующего «за», красный — голосующего «против».

Ответ: ДЛЯ ВСЕХ x СУЩЕСТВУЕТ y ТАКОЙ, ЧТО (y за И x сосед y).

5.2 (6 баллов)Докажите, что количество различных выражений, описывающих очереди для голосования, которые можно составить при помощи предикатов "за", "против" и "рядом", двух переменных *x* и *y*, кванторов и логических связок, не превышает $2^{2^{18}+15}$. (Выражения считаются одинаковыми, если для каждой очереди их значения совпадают).

Решение:
Назовём очереди эквивалентными, если любые два рассматриваемых выражения дают на них одинаковые значения. Оценим общее количество попарно неэквивалентный очередей.
Для начала, рассмотрим отдельно очереди, состоящие не более, чем из трёх человек. Их 1+2+4+8 = 15, включая пустую очередь.
В оставшихся очередях любой человек имеет как соседних с ним людей, так и не соседних. Каждый человек может, во-первых, сам голосовать «за» или «против» (2 варианта). Во-вторых, его соседи могут все голосовать «за», все «против», или среди них могут быть и те, и другие (3 варианта). Аналогичная ситуация наблюдается и для не соседних с ним людей (ещё три варианта). Всего получаем $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ различных типов людей в очереди. Значение любого допустимого выражения исчисления предикатов на какой-либо очереди полностью определяется наличием или отсутствием в ней людей каждого из типов. Значит, всего получаем максимум 2^{18} неэквивалентных очередей длины более 3 (на самом деле меньше, так как не все типы людей могут существовать или не существовать одновременно).
Итого получаем 2^{18}+15 неэквивалентных очередей. Каждое выражение на каждой очереди

принимает одно из двух возможных значений: «истина» или «ложь», значит, всего получаем не более $2^{2^{18}+15}$ различных выражений, что и требовалось доказать.

6. Графы.

В классе 9 человек, которые изучают некоторое количество предметов. Каждый предмет хорошо знают ровно три человека. Для участия в многопредметной олимпиаде хочется выбрать команду, в которой были бы знатоки всех предметов.
Ясно, что если количество предметов не превосходит 3, наименьшее число членов команды, которое можно гарантировать не зная распределения учеников по предметам совпадает с числом предметов.

6.1. (5 баллов) Постройте пример класса из 9 человек и некоторого количества предметов, для которого нельзя выбрать 3 человек, так, чтобы каждый предмет был известен хотя бы одному из них.
Объясните, почему Ваш пример удовлетворяет этому условию.
Чем меньше количество предметов, тем выше будет оценка.

6.2 (5 баллов) А для какого наименьшего количества предметов может не хватить 3 участников?

Ответ: 7 предметов.

Пример:
Первое число в сроке обозначает участника, остальные числа — какие предметы он знает.
1) 1 2 3
2) 1 4 5
3) 1 4 6
4) 2 3 4
5) 2 5 6
6) 3 5 6
7, 8, 9) 7

Обоснование примера: в команду совершенно точно потребуется кого-то трёх человек, знающих только предмет 7, один — предмет 8 и один — предмет 9. Из людей с номерами 1 — 6 невозможно выбрать двоих, которые бы знали все предметы 1-6: действительно, если бы двое людей знали бы шесть предметов, то множества известных им предметов бы не пересекались, в то время как любые двое из этих шести знают общий предмет.

Оценка: докажем теперь, что если количество предметов не превосходит 6, то всегда можно обойтись командой не более, чем из 3 человек. Можно считать, что количество предметов ровно 6, так как если для 6 предметов можно выбрать команду из 3 человек, то для меньшего количества предметов тоже можно.

Если переформулировать задачу на языке двудольных графов, в доле «предметов» суммарная степень вершин равна $6\cdot 3=18$. Все эти 18 рёбер входят в долю «учеников». Поскольку $18:9=2$, мы имеем два возможных случая: в доле «учеников» есть вершина степени хотя бы 3, т. е. ученик, знающий три предмета, или все вершины в этой доле имеют степень ровно 2.

В первом случае возьмём в команду человека, знающего хотя бы три предмета. Нам осталось выбрать из 8 человек двоих так, чтобы они покрыли оставшиеся три предмета (если предметов осталось меньше, наша задача очевидна). Так как $3 \cdot 3 > 8$, кто-то из оставшихся учеников знает хотя бы два из оставшихся предметов. Возьмём в команду его и какого-то человека, знающего третий предмет.

Второй случай: все ученики знают ровно по два предмета. Предположим, что выбрать команду из трёх человек нельзя.

Очевидно, что есть два ученика, знающие непересекающися наборы предметов. Скажем для определённости, что это (в предыдущих обозначениях) 1) 1 2 и 2) 4 5. Тогда не существует ученика, знающего одновременно предметы номер 3 и 6. Не умаляя общности, можно предположить, что ученики 3-5) знают предмет 3, а ученики 6-8) предмет 6.
Кто-то из этих шести учеников 3-8) должен знать предмет 1. Не умаляя общности, пусть это ученик 3). Тогда никто из учеников 6-8), знающий предмет 6, не знает предмета номер 2, иначе этот ученик образует команду из трёх человек вместе у учениками 2) и 3). Значит, предмет 2 известен кому-то из учеников 4-5), допустим это ученик 4).
Аналогичные рассуждения приводят к тому, что, не умаляя общности, ученики 6) и 7) знают 4 и 5 предметы соответственно.
Итак, мы получили такую ситуацию:
1) 1 2
2) 4 5
3) 3 1
4) 3 2
6) 6 4
7) 6 5
Эта задача допускает ещё одну переформулировку на языке графов: пусть предметам соответствуют вершины графа, а ученикам — рёбра. Ребро соединяет две вершины если ученик знает эти два предмета. Здесь две вершины могут быть соединены более, чем одним ребром, если есть два ученика с одинаковым набором знаний.
Тогда нам известно, что вершины 1, 2 и 3 попарно соединены рёбрами (образуют треугольник). Из них выходит ещё по одному ребру, значит, хотя бы одно ребро идёт в вершины 4, 5, 6, которые также образуют треугольник. Пусть это ребро соединяет вершины 1 и 4. Тогда мы можем взять в команду учеников, знающих предметы 1 и 4, 2 и 3, 5 и 6.