## ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

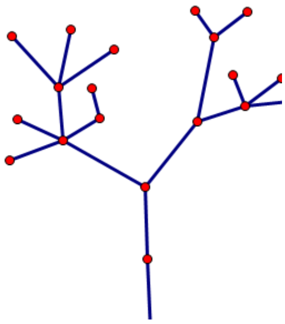
**1 уровень (6 баллов)**
**Задача «Отрицание 1-2»**
Построить логическую схему из одного элемента NOT и любого числа элементов XOR, AND и OR, которая имеет два входа x и y и два выхода, на которые должны поступать сигналы NOT x и NOT y. (ответ можно представить как в форме логической схемы, так и в форме логического выражен

2 **уровень (11 баллов)**
**Задача «Отрицание 2-3»**
Построить логическую схему из двух элементов NOT и любого числа элементов AND и OR, которая имеет три входа x, y и z и три выхода, на которые должны поступать сигналы NOT x, NOT y, NOT z.
(ответ можно представить как в форме логической схемы, так и в форме логического выражен

## ГРАФЫ

**Задача «Экономный сбор информации» - вершинное покрытие графа**

**Уровень 1 (3 балла)**



На рисунке показана дерево иерархической подчиненности нескольких организаций, изображенных точками. Нижняя вершина — корень дерева — является головной организацией. Статистическому бюро нужно собрать сведения о всех организациях. Каждая организация может предоставить сведения о себе, а также тех организациях, которые находятся в её непосредственном подчинении и той организации, в непосредственном подчинении которой она сама находится (то есть на графе — это сама вершина и соседние с ней). *Какие из организаций достаточно опросить, чтобы получить информацию о всех организациях, сделав наименьшее число запросов?* Такой набор вершин называется наименьшим вершинным покрытием графа. Тогда вопрос задачи будет звучать так: *найдите все наименьшие вершинные покрытия заданного в условии дерева.*

Примечание. Вершинным покрытием называется подмножество вершин графа, содержащее по крайней мере одного соседа каждой вершины, не входящей в это множество. Наименьшим покрытием будем называть покрытие с наименьшим числом вершин.

**Уровень 2 (6 баллов)**
Описать алгоритм, который строит какое-либо наименьшее вершинное покрытие любого дерева и обосновать его корректность.

**Уровень 1 (3 балла)**

В задаче на графы строились наименьшие вершинные покрытия деревьев. В этой задаче требуется *найти количество M(n) вершин в наименьших вершинных покрытиях цепи с n вершинами* (на рисунке показана цепь с 4 вершинами, в ней можно выбрать две средние вершины в качестве вершинного покрытия, но одной любой вершины уже не хватит, поэтому M(4)=2).

**Уровень 2** (9 баллов)

Сколько различных наименьших покрытий цепь с n вершинами? Найдите число покрытий N(n) для n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

**Уровень 3 (12 баллов)**

Выведите рекуррентную формулу для N(n).

## РЕГУЛЯРНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

**Задача «Бусы»**
**Уровень 1 (3 балла)**
Бусы составляются из красных (к) и синих (с) бусинок по следующим правилам:
1) бусы могут состоять из одной красной бусины: <БУСЫ> => к
2) слева к уже готовым бусам можно добавить сначала красную, а потом синюю бусины: <БУСЫ> => кс<БУСЫ>
3) справа к уже готовым бусам можно добавить или красную или синюю бусину:
<БУСЫ> => <БУСЫ>к
<БУСЫ> => <БУСЫ>с
*Опишите с помощью регулярных выражений все возможные виды бус, построенные по этим правилам.* Чем меньше операций итерации будет использовано в ответе, тем лучше.

**Уровень 2 (9 баллов)**
Бусы составляются из красных (з) и синих (с) бусин по следующим правилам:
1) бусы могут состоять из двух бусин — красной и следующей за ней синей: <БУСЫ> => кс
2) слева к уже готовым бусам можно добавить красную бусину, одновременно добавляя справа синюю:
<БУСЫ> => к<БУСЫ>с
*Докажите, что множество этих бус нельзя описать с помощью регулярного выражения.*

## ЛОГИКА (МИРЫ ТАРСКОГО)

**Задача. Шашки**

**Уровень 1 (6 балов)**

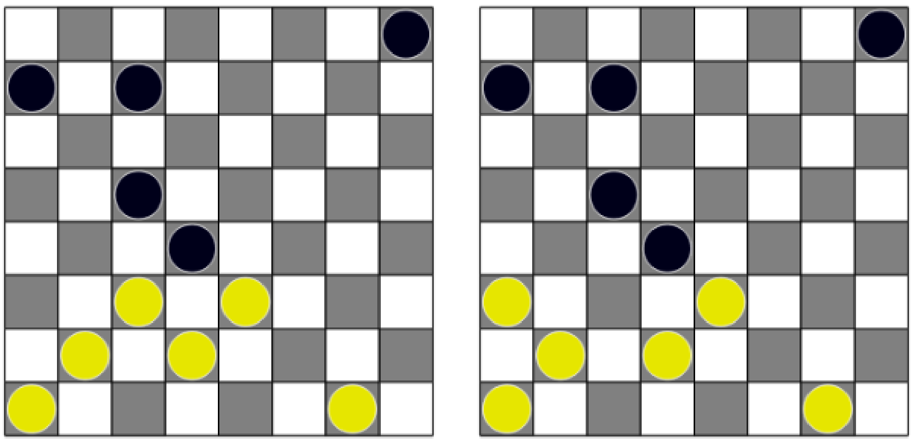
Двое игроков расставляют фигуры для игры в шашки (то есть фигуры ставятся только на черные поля доски). Один игрок расставляет как угодно любое число белых шашек в нижней части доски, второй игрок — любое число чёрных в верхней, но так, чтобы чёрные стояли на горизонталях, расположенных выше горизонталей, на которых стоят белые.

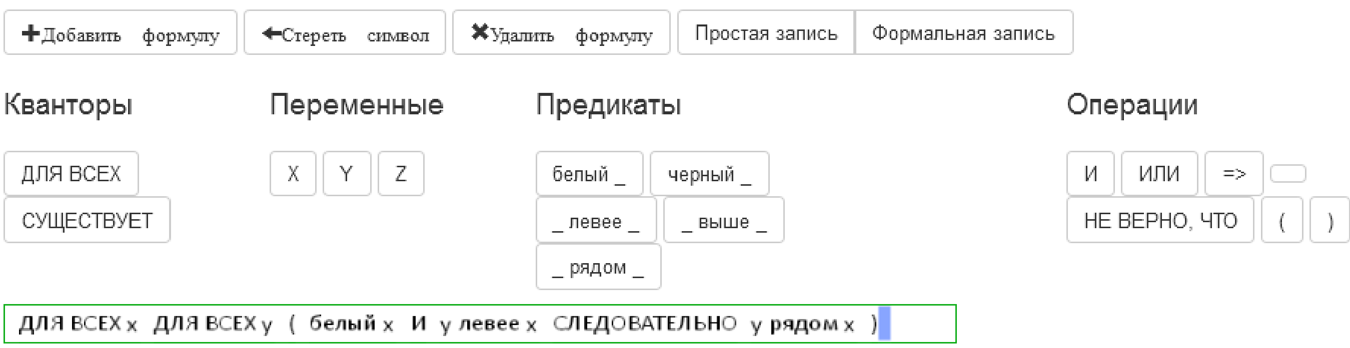
Первый ход делают белые. Ситуация перед началом игры считается благоприятной для белых, если в соседней клетке по диагонали рядом с хотя бы одной белой фигурой есть чёрная, которую она может «съесть», перескочив через неё по диагонали на соседнюю свободную клетку (по шашечным правилам). *Постройте логическую формулу благоприятной для белых ситуации перед началом игры.*

*<u>Формула должна быть представлена в префиксной форме, что означает, в начлае формулы друг за другом должны идти кванторы (например, «Для всех x Существует y, такой что Для всех z …» далее следует выражение без кванторов).</u>*

В качестве примера логической формулы высказывания приведём формальную запись описания такого расположения шашек: «Если шашечная фигура стоит левее белой (то есть, находится на вертикали, которая левее вертикали, на которой стоит исходная белая), то она стоит рядом с ней».

На рисунке показано, какими переменными, свойствами (предикатами), кванторами («для всех», «существует») и логическими операциями можно пользоваться при записи ответа.





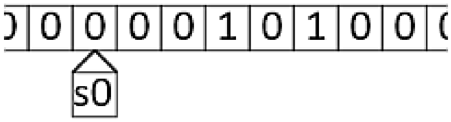

**Уровень 2 (9 баллов)**

Предположим что в условиях предыдущей задачи имеется возможность использовать любое число переменных и любое число кванторов («Для любых», «Существует такой, что»).

Можно ли тогда для обычной шахматной доски 8x8 записать утверждение о том, что все фигуры установлены на начальную для игры в шашки позицию: белые занимают сплошь три нижних ряда, а чёрные верхние три (имеются в виду только чёрные клетки рядов), используя только заданные

# АЛГОРИТМ. МАШИНА ТЬЮРИНГА

**Уровень 1 (3 балла)**
На ленте стоят две единицы, между которыми стоит ноль. Остальная часть ленты заполнена нулями. Головка машины указывает на ноль, стоящий на две позиции левее левой единицы (см. рисунок). Нужно сконструировать машину Тьюринга, которая, кроме начального (s) и конечного (f) состояний, имеет ещё одно (q) и не использует иных символов алфавита, кроме {1;0}.




Эта машина должна поставить на ленту как можно больше символов 1 (не обязательно подряд) и остановиться. Попробуйте добиться того, чтобы *на ленте после остановки машины было не меньше 5 единиц*.

**Уровень 2** (9 баллов)

В условиях первой задачи цикла попробуйте добиться того, чтобы *на ленте после остановки машины было не меньше 8 единиц*. Можно ли построить машину с такими свойствами?

**Уровень 3 (11 баллов)**

Рассмотрим все машины Тьюринга с двумя состояниями - начальным (s) и «промежуточным» (q) (конечного состояния в машине нет), головка которых может двигаться только вправо (R). Алфавит машин состоит только из двух символов {1;0}. Изначально на ленте записано некоторое число символов 1 (не обязательно идущих подряд), остальная часть ленты заполнена символами 0, а считывающая головка указывает на крайнюю левую единицу. Машина останавливается, если встречается комбинация состояния и символа на ленте, для которой действие машин не определено.

*Найдите такую конфигурацию расстановки единиц, для которой ни одна из машин с указанными в задаче ограничениями не может удалить все единицы заданной конфигурации, после чего остановиться*. Постарайтесь найти минимальную конфигурацию с таким свойством. Ответ обоснуйте.

*Дополнительный вопрос (не обязательный). Попробуйте с помощью регулярных выражений описать все возможные конфигурации, для которых среди указанных машин найдётся такая, которая удалит все единицы и остановится.