Решения задач отборочного тура (два варианта)

Вариант 1

2015 Регулярные выражения

Постройте регулярное выражение, описывающее множество слов из букв a и b, из которого удалены все слова, задаваемые регулярным выражением a*b*. Постарайтесь, чтобы выражение было как можно короче.

Решение. Условие означает, что в множестве слов обязательно присутствует фрагмент ba, до и после которого могут идти любые буквы.

Ответ. Одно из возможных регулярных выражений: (a+b)*ba(a+b)*

2015 Машина Тьюринга

Построить машину, которая делит записанное на ленте число в единичной системе счисления на 2 нацело (то есть, число «шесть», представленное на ленте набором единиц 111111 преобразуется в число 111, а число 11111 в число 11).
В качестве примера приведена машина Тьюринга, добавляющая к числу 1. В начальном состоянии s0 и в конечном состоянии f головка машины должна указывать на первую единицу числа.

Решение. Уточним постановку задачи, определив, что машина будет обрабатывать все числа, кроме 1 (в этом случае условием задачи не определено, где должна находиться головка машины). Один из вариантов решения — анализировать число на ленте слева направо, стирая по две единицы, а результат записывать левее исходного числа справа налево — на одно стирание двух единиц одну единицу результата.

Ответ. Ниже приведен пример одного из возможных решений:

```
s0 [1] -> q1 [1] R      «инициализация» результата
q1 [1] -> q2 [*] R      замена первых двух единиц одной

q2 [1] -> q3 [*] R      стирание очередной единицы числа
q3 [1] -> q4 [*] L      стирание следующей за очередной единицы числа

q4 [*] -> q4 [*] L      поиск конца результата
q4 [1] -> q5 [1] R      и добавление
q5 [*] -> q6 [1] R      единицы в его конце

q6 [*] -> q6 [*] R      поиск очередной единицы заданного числа
q6 [1] -> q2 [1] N      и повторение операции двух единиц числа единицей результата

q2 [*] -> q7 [*] L      завершение работы
q7 [*] -> q7 [*] L      через пропуск стертых символов
q7 [1] -> q8 [1] L      и остановкой
q8 [1] -> q8 [1] L      на первой единице результата
q8 [*] -> f [*] R       в случае чётного числа единиц

q3 [*] -> q7 [*]N       то же для нечётного числа единиц
```

2015 Логические схемы

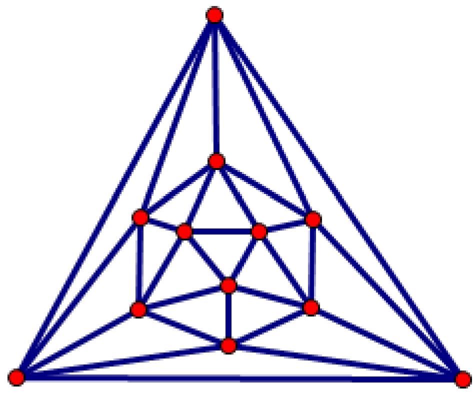
Соберите схему с 4 входами из элементов И, ИЛИ, НЕ, ИЛИ-ИЛИ (обозначения, AND, OR, NOT, XOR), которая даёт 1 на выходе тогда и только тогда, когда на вход подаются две 1 и два 0.

Решение. Функция XOR позволяет легко отделить чётное число единиц на входе от нечётного. Так схема, соответствующая логическому выражению xXORyXORzXORu (Легко проверить, что порядок выполнения операций может быть любым, поэтому скобок можно не ставить) даёт на выход 1, если число единиц на входе нечётно, то есть одна или три.
Отрицание этого выражения даёт на выходе 1, если на входе число единиц — 0, 2 или 4.
Эти случаи можно учесть если добавить (с помощью операции AND) условия xORyORzORu и NOT(xANDyANDzANDu).
Ответ. Один из вариантов, использующий 12 логических элементов:
(xXORyXORzXORu) AND (xORyORzORu) AND NOT(xANDyANDzANDu).

2015 Графы

Постройте плоский граф (рёбра плоского графа не пересекаются во внутренних точках рёбер) на любом количестве вершин, в каждой вершине которого сходятся ровно 5 рёбер. Вершины графа можно перемещать.
Решение. За основу можно взять граф икосаэдра. Различных решений бесконечно много.

Ответ:



2015 Мир Тарского
Написать условие того, что на поле ни на одной горизонтали не может стоять ровно одна фигура.
В качестве примера приведена запись условия того, что рядом с любой синей фигурой стоит другая синяя фигура.

ДЛЯ ВСЕХ x (синий x СЛЕДОВАТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЕТ y ТАКОЙ, ЧТО (синий y И x рядом y))

Решение. Условие можно переформулировать так: «Если на поле стоит фигура, то найдётся фигура, стоящая левее или правее её, но не ниже и не выше».

Ответ: В формальной записи:
ДЛЯ ВСЕХ x СУЩЕСТВУЕТ y ТАКОЙ, ЧТО (((x левее y) ИЛИ (y левее x)) И (НЕ ВЕРНО, ЧТО (x выше y) И (НЕ ВЕРНО, ЧТО (y выше x))

2015 Комбинаторика

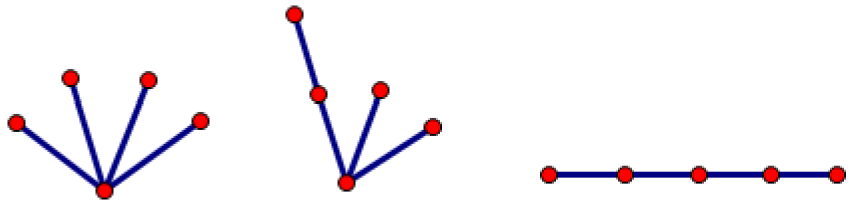
Перечислить все различные (неизоморфные) деревья (связные графы без циклов) на 5 вершинах.
Изоморфными называются графы, которые перемещением (без совмещения) вершин можно

привести к одному виду. Связным называется граф, у которого любые две вершины можно соединить путем из ребер графа. Цикл - замкнутый путь без повторного прохода по ребрам.

Решение. Заметим, что по индукции легко доказать, что в любом дереве число вершин на 1 больше числа рёбер (начиная с одной вершине, добавляем по одному ребру — при этом добавляется по одной вершине и по одному ребру): B=P+1. Если суммировать число рёбер, входящих в каждую вершину (степени вершин), то получится число вдвое больше числа рёбер, так как каждое ребро соединяет две вершины: deg(V1)+deg(V2)+...=2P.

Таким образом для пяти вершин сумма степеней будет равна 2*4=8. Рассмотрим все разложения числа 8 в сумму пяти слагаемых и соответствующие деревья:
8=4+1+1+1+1; 8=3+2+1+1+1; 8=2+2+2+1+1

Ответ. Нетрудно видеть, что каждому разложению соответствует ровно одно дерево. Все другие можно получить перемещением вершин из этих трёх (изоморфны), в то же время ни какие два из этих трёх деревьев не изоморфны, так как отличаются степенями вершин.



Вариант 2

2016 Регулярные выражения

Напишите регулярное выражение из букв {a;b}, которое описывает все цепочки, содержащие подцепочку abba.

Ответ. (a+b)*abba(a+b)*

Замечание. Более длинный ответ (b+a(a+ba)*bbb)*a(a+ba)*bba(a+b)* обладает тем не менее одним замечательным свойством — каждая цепочка в нём учитывается ровно один раз.

2016 Машина Тьюринга

Постройте машину Тьюринга, которая превращает последовательности вида 010101…01 (чередующихся нулей и единиц, начинающихся с 0 и заканчивающихся 1) в последовательность 101010...10 (чередующихся нулей и единиц, начинающихся с 1 и заканчивающихся 0), а все остальные последовательности не меняет. Приведен пример машины Тьюринга, которая в любой последовательности меняет 1 на 0, а 0 на 1.

Решение. Двигаясь слева направо, меняя нули на единицы, а единицы на нули (инвертируя символы), до тех пор пока они чередуются таким образом. Если это правило не соблюдается, идём в обратном направления инвертируя элементы повторно.

Ответ.
s0 [0] -> q1 [1] R   инвертирование
q1 [1] -> s0 [0] R   элементов последовательности

s0 [1] -> q2 [1] L   фиксация нарушения нужного
q1 [0] -> q2 [0] L   чередования состоянием q2

q2 [0] -> q2 [1] L   движение обратно

q2 [1] -> q2 [0] L   с повторным инвертированием

q2 [*] -> f [*] R   остановка выполнения
s0 [*] -> f [*] L   для разных случаев
q1 [*] -> f [*] L   не обязательно на начальном символе

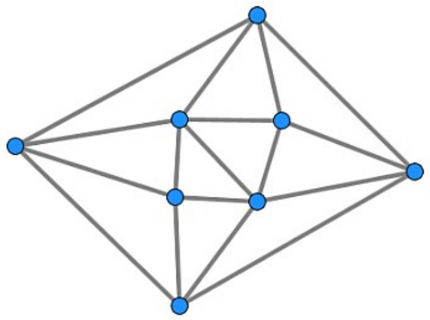
2016 Логические схемы

Соберите схему с 4 входами из элементов И, ИЛИ, НЕ, ИЛИ-ИЛИ (обозначения, AND, OR, NOT, XOR), которая даёт 1 на выходе тогда и только тогда, когда на вход подаются по крайней мере две 1.

Решение. Можно перебрать все пары входов на которые подаются единицы, соединив их операцией AND а сами пары — операцией OR.
Ответ.
xANDy OR xANDz OR xANDu OR yANDz OR yANDu OR zANDu (11 элементов)
можно уменьшить число логических элементов
xAND(yORzORu) OR yAND(zORu) OR zANDu (8 элементов)

2016 Графы
Постройте плоский граф (рёбра плоского графа не пересекаются во внутренних точках рёбер), в двух вершинах которого сходится по 5 рёбер, а в остальных вершинах по 4 рёбра. Постарайтесь, чтобы вершин было как можно меньше. (Вершины графа можно перемещать).

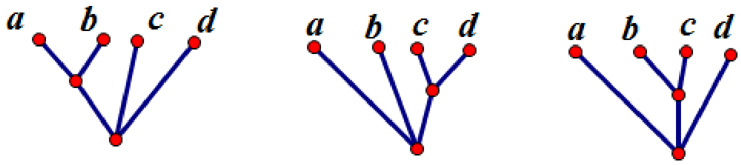
Ответ.



2016 Мир Тарского
Написать условие того, что на поле ни на одной вертикали не может стоять ровно одна фигура.
В качестве примера приведена запись условия того, что рядом с любой синей фигурой стоит другая синяя фигура.

Решение. Условие можно переформулировать так: «Если на поле стоит фигура, то найдётся фигура, стоящая выше или ниже её, но не левее и не правее».
Ответ: В формальной записи:
ДЛЯ ВСЕХ x СУЩЕСТВУЕТ y ТАКОЙ, ЧТО (((x выше y) ИЛИ (y выше x)) И (НЕ ВЕРНО, ЧТО (x левее y) И (НЕ ВЕРНО, ЧТО (y левее x))

2016 Комбинаторика
На 4 фиксированных вершинах («листьях») можно построить 3 плоских деревьев, у которых в каждой из остальных вершин сходятся ровно по 3 ребра.

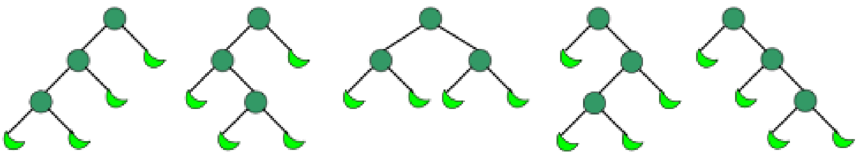


Сколько таких деревьев можно построить на 6 вершинах (a,b,c,d,e,f)?

Решение:

Заметим, что задача была бы проще, если бы в корне дерева сходились 2 ребра. Тогда дерево будет бинарным, то есть если его нарисовать по уровням — от корня к листьям, то из каждого узла будут выходить ровно две ветви. Количество бинарных деревьев описывается интересной комбинаторной последовательностью — числами Каталана.

Вот, например, рисунок со странички, где эти числа обсуждаются (https://habrahabr.ru/post/165295/):



Если листья пронумеровать: L1, L2, …, Ln, то описание различных деревьев можно описать с помощью скобок, описывающих, какие листья и ветки соединены. Например, деревьям на картинке соответствуют такие скобочные формулы (для краткости записи буква L опущена): (((12)3)4), ((1(23))4), ((12)(34)), (1((23)4)), (1(2(34))).

Эта идея позволяет написать формулу для чисел Каталана:
C(n)=C(1)*C(n-1)+C(2)*C(n-2)+...+C(n-1)*C(1), где C(i) – число бинарных деревьев на n вершинах. В предыдущем примере формула выглядит так:
C(4)=C(1)*C(3)+C(2)*C(2)+...+C(1)*C(3) и может быть прочитано следующим образом. От корня идут две ветви — левая и правая. Распределение листьев между этими ветвями может быть таким: 1+3, 2+2, 3+1. Поскольку комбинации на каждой ветви не зависят от комбинаций на другой, применяем принцип умножения.

Последовательно по полученной рекуррентной формуле можно вычислить: C(1)=1, C(2)=1, C(3)=2, C(4)=5.

В нашей задаче из корня выходит три ветви, каждая из которых уже является бинарным деревом, поэтому нужно рассмотреть распределение листьев между тремя ветками и далее уже применить формулу для чисел Каталана:

1+1+4 = 1+2+3 = 1+3+2 = 1+4+1 = 2+1+3 = 2+2+2 = 2+3+1 = 3+1+2 = 3+2+1 = 4+1+1

Таких вариантов 10 и их тоже можно разделить на три группы:
3 варианта со слагаемыми {1;1;4}
6 вариантов со слагаемыми {1;2;3}
1 вариант со слагаемыми {2;2;2}

Таким образом, результат вычисляется по формуле:
3*C(1)*C(1)*C(4)+6*C(1)*C(2)*C(3)+1*C(2)*C(2)*C(2) = 3*1*1*5+6*1*1*2+1*1*1*1=
= 15+12+1=28

Ответ 28.