10-11 класс

№1

Дана функция $y = \sqrt{4sin^4x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 2cos2x + 3}$. Укажите множество значений функции.

Решение:

$y = \sqrt{4sin^4x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 2cos2x + 3}$.

ОДЗ: $\begin{cases} 4sin^4x - 2cos2x + 3 \geq 0; \\ 4cos^4x + 2cos2x + 3 \geq 0. \end{cases}$

1. Преобразуем подкоренные выражения:

а) $4sin^4x - 2cos2x + 3 = 4 * \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2 - 2cos2x + 3 = (1 - cos2x)^2 -$ $-2cos2x + 3 = 1 - 2cos2x + cos^2 2x - 2cos2x + 3 = cos^2 2x - 4cos2x + +4 =$ $(cos2x - 2)^2$.

б) $4cos^4x + 2cos2x + 3 = 4 * \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2 + 2cos2x + 3 = (1 + cos2x)^2 +$ $+2cos2x + 3 = 1 + 2cos2x + cos^2 2x + 2cos2x + 3 = cos^2 2x + 4cos2x+4 ==$ $(cos2x + 2)^2$.

2. Функция принимает вид:

$y = \sqrt{(cos2x - 2)^2} + \sqrt{(cos2x + 2)^2}$; $y = |cos2x - 2| + |cos2x + 2|$.

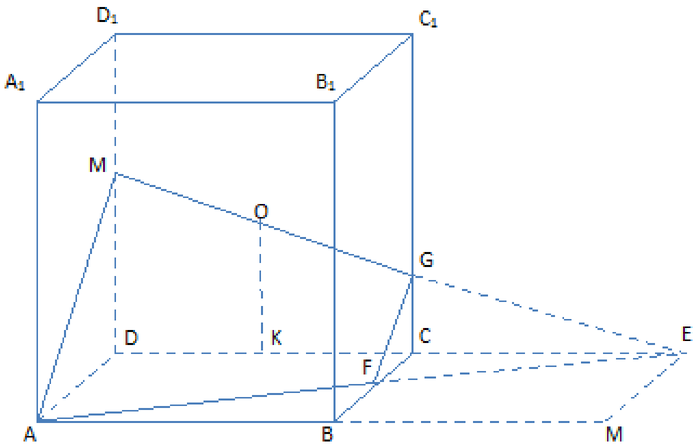
3. Т. к. множество значений функции $y = cos2x$ от -1 до 1, то $y = -cos2x + 2 + cos2x + 2$; y=4; E(y)=4.

Ответ: E(y)=4.

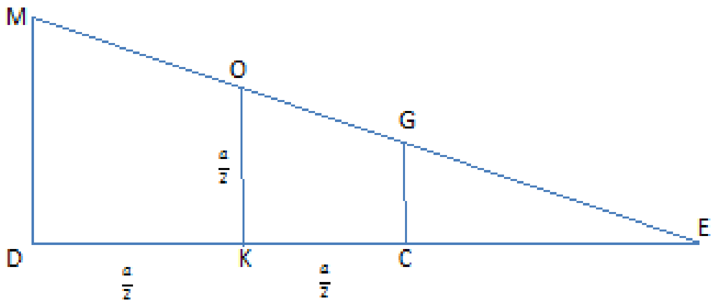
№2

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$проведено сечение через вершину *A*, середину ребра BC и центр грани DCD_1C_1. Найдите площадь сечения и узнайте, в каком отношении секущая плоскость разбивает объём куба.

Решение:

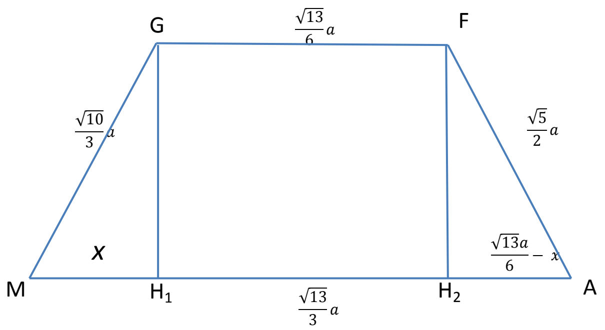


Пусть сторона куба равна a. $\Delta EGC \sim \Delta EOK \sim \Delta EMD$. (∟ E-общий; ∟ GCE=∟ OKE=∟ MDE=90º).



$$\frac{GC}{OK} = \frac{EC}{EK} \Longrightarrow GC = OK \cdot \frac{EC}{EK} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{a}{3};$$

$$\frac{MD}{OK} = \frac{ED}{EK} \Longrightarrow MD = OK \cdot \frac{ED}{EK} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3}a.$$



$GF||MA$ (поскольку прямые GF и MA лежат в параллельных плоскостях AA_1D_1D и BCC_1B_1). Откуда, $MGFA$ – трапеция.

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a\ ;$$

$$FG = \sqrt{FC^2 + CG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}a;$$

$$MG = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}a;$$

$$MA = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}a^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}a;$$

$$h^2 = GM^2 - MH_1^2 = FA^2 - AH_2^2;$$

$$\frac{10a^2}{9} - x^2 = \frac{5a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{13}a}{6} - x\right)^2;$$

$$\frac{10a^2}{9} - x^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{13a^2}{36} + \frac{\sqrt{13}}{6}ax - x^2;$$

$$\frac{\sqrt{13}}{3}ax = \frac{40a^2 - 45a^2 + 13a^2}{36} = \frac{8a^2}{36} \to x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}a;$$

$$h = \sqrt{\frac{10}{9}a^2 - \frac{4}{117}a^2} = \sqrt{\frac{14}{13}}a;$$

$$S = \frac{\left(\frac{\sqrt{13}}{6}a + \frac{\sqrt{13}}{3}a\right)}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{13}}a = \frac{\sqrt{13}}{4}a \cdot \sqrt{\frac{14}{13}}a = \frac{\sqrt{14}}{4}a^2;$$

AMDFGC – усеченная пирамида.

$$V_{EAMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AD \cdot MD \cdot 2a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3}a \cdot 2a = \frac{2}{9}a^3;$$

$$V_{EFCG} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot FC \cdot CG \cdot a = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot a = \frac{a^3}{36}.$$

Объем усеченной пирамиды: $\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{36}\right)a^3 = \frac{7}{36}a^3$;

$$a^3 - \frac{7}{36}a^3 = \frac{29}{36}a^3;$$

$$\frac{29}{36} \div \frac{7}{36} = \frac{29}{7}.$$

Секущая плоскость делит куб в отношении 29:7.

Ответ: $S = \frac{\sqrt{14}}{4}a^2$; 29:7.

№3

Верно ли, что число $(201676^{2016} - 201474^{2014}) * (201676^{2015} + 201474^{2015})$ делится на 10000. Ответ обоснуйте.

Решение:

1) число 76 в любой натуральной степени оканчивается на 76;

2) число 74 в четной степени оканчивается на 76, в нечетной степени на 24:

$(201676^{1008} + 201474^{1007})$ – оканчивается двумя нулями.

$(201676^{2015} + 201474^{2015})$ – оканчивается двумя нулями.

Значит, данное произведение оканчивается на четыре нуля, а, значит, делится на 10000.

№4

В кубе со стороной 1 м летают 2015 бабочек. Докажите, что хотябы три из них находятся в шаре радиуса $\frac{1}{11}$ м.

Решение:

1) Разобьем куб со стороной 1 м на 1000 маленьких кубиков со стороной $\frac{1}{10}$ м. Используем принцип Дирихле. Очевидно, что если 2015 бабочек рассадить по 1000 кубикам, то в некоторых из кубиков сидят по 3 бабочки. Вычислим радиус сферы, описанной вокруг куба.

Радиус сферы равен половине диагонали куба со стороной $\frac{1}{10}$ м.

$R = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{20}$.

$\frac{1}{11} > \frac{\sqrt{3}}{20}$, следовательно, сфера радиуса $\frac{1}{11}$ м будет содержать кубик с тремя бабочками.

№5

Определите, при каком значении параметра a решением неравенства

$x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \geq 0$ является множество всех действительных чисел.

Решение:

$x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \geq 0;$

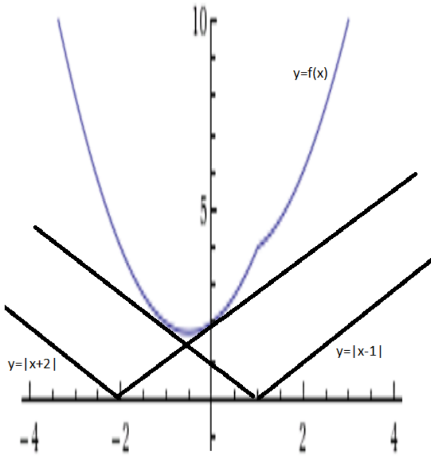
$x^2 - |x - 1| + 3 \geq |x - a|$ – теперь задача свелась к исследованию взаимного расположения графиков функций, т.е. к нахождению такого a, при котором график функции $y = x^2 - |x - 1| + 3$ лежит не ниже графика функции $y = |x - a|$.

$y = x^2 - |x - 1| + 3$

1) Если $x - 1 \geq 0$, то $x \geq 1$
   $x^2 - x + 1 + 3 = x^2 - x + 4$
   $y = x^2 - x + 4$
2) Если $x - 1 < 0$, то $x < 1$
   $x^2 - \left(-(x - 1)\right) + 3 = x^2 + x - 1 + 3 = x^2 + x + 2$
   $y = x^2 + x + 2$

Получим функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4, \text{ при } x \geq 1; \\ x^2 + x + 2, \text{при } x < 1. \end{cases}$.

Графиком функции $y = |x - a|$ является «галочка», которая «скользит» по Ox. Чем больше a, тем она правее и наоборот.



Найдем предельные значения для а. Правая точка касания получается, если прямая $y = x - a$ (правая ветвь «галочки») является касательной к графику функции $y = x^2 + x + 2$.

$x^2 + x + 2 = x - a;$

$x^2 + 2 - a = 0;$

$D = -4(2 + a) = 0$ – приравниваем к нулю, т.к. для единственной общей точки необходимо только одно решение.

$-8 - 4a = 0$

$a = -2$

Левая точка касания получается, если прямая $y = a - x$ (левая ветвь) является касательной к графику функции $y = x^2 + x + 2$.

$x^2 + x + 2 = -x + a;$

$x^2 + 2x + (2 - a) = 0;$

$D = 4 - 4(2 - a) = 0 \Rightarrow a = 1.$

Итак, при $-2 \leq a \leq 1$ график функции $y = x^2 - |x - 1| + 3$

лежит не ниже графика функции $y = |a - x|$.

Очевидно, что, если $y = |x - a|$ касается части функции $f(x)$, задаваемой формулой $y = x^2 - x + 4$ при $x \geq 1$, то, в этом случае, $y = |x - a|$ пересекает левую часть, задаваемую формулой $y = x^2 + x + 2$ при $x < 1$.

Ответ: $-2 \leq a \leq 1$

№6

В стране N, где живут только правдолюбы, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, существуют три политические партии. Любой житель страны состоит в одной из партий. Во время переписи населения каждому жителю задали по три вопроса: «Состоите ли Вы в первой партии?», «Состоите ли Вы во второй партии?», «Состоите ли Вы в третьей партии?». При подведении итогов переписи на эти вопросы были получены 60%, 50% и 40% утвердительных ответов соответственно. Определите кого больше во второй партии: правдолюбов или лжецов?

Решение:

Каждый из правдолюбов ответил «Да», только на один вопрос, а каждый лжец – на 2. Общее количество утвердительных ответов равно 150% (60% +50% +40%). Значит, 50% населения – лжецы. Ведь утвердительно на вопрос о принадлежности ко второй партии ответили правдолюбы из второй партии и лжецы, не состоящие во второй партии. Если правдолюбы второй партии – n% населения, то лжецы не из второй партии – (50-n)%, а лжецы второй партии – (50-(50-n))=n%. Значит, во второй партии лжецов и правдолюбов было поровну.