ВАРИАНТ 1

Задача 1

Найдите сумму натуральных чисел $n \in [40;60]$, которые нельзя представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Решение:

Натуральные числа, кратные 4, можно представить в виде разности квадратов: $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Нечетные числа тоже можно представить в виде разности квадратов: $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Так как $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$, то разность квадратов либо нечетна, либо кратна 4. Отсюда следует, что числа, не представляемые в виде разности квадратов, имеют вид $4n+2$. На промежутке $[40;60]$ такими числами будут числа 42,46,50,54,58. Их сумма равна 250.

Ответ: 250.

Задача 2

Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{2+x-\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} + x$ на промежутке $[0;7]$.

Решение:

$y = \dfrac{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} + x = \sqrt{x+2} + x$. Наибольшее значение достигается при $x = 7$ и равно 10.

Ответ: 10.

Задача 3

Решите уравнение $\log_{8\sqrt{x}}(8\sqrt{x}+5) = \log_{x+16}(x+21)$.

Решение:

Если $8\sqrt{x} < 1$, то правая и левая части имеют разные знаки. При $8\sqrt{x} > 1$ перепишем уравнение в виде $\dfrac{\ln(8\sqrt{x}+5)}{\ln 8\sqrt{x}} = \dfrac{\ln((x+16)+5)}{\ln(x+16)}$. Функция $y = \dfrac{\ln(t+5)}{\ln t}$ убывающая при $t > 1$, так как ее производная $y' = \dfrac{(t+5)^{-1}\ln t - t^{-1}\ln(t+5)}{\ln^2 t}$ отрицательна. Отсюда следует, что $8\sqrt{x} = x+16$ и $x = 16$.

Ответ: 16.

Задача 4

Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=2\sqrt{y} \\ \sqrt{y}+\sqrt{2-y}=2\sqrt{1-x}. \end{cases}$

Решение:

Если сложить уравнения системы, то получим уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=\sqrt{y}-\sqrt{2-y}$. После возведения его в квадрат получаем уравнение $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2y-y^2}$, из которого следует, что $x^2=(y-1)^2$. Отсюда получаем $x=0, y=1$.

Ответ: (0,1).

Задача 5

Сколько корней на интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ имеет уравнение $\dfrac{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}=\dfrac{\operatorname{tg} x}{5}$?

Решение: Преобразуем левую часть уравнения :

$$\frac{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}=\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$. Правая часть

преобразуется следующим образом: $\dfrac{\operatorname{tg} x}{5}=\dfrac{\sin x}{5\cos x}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{5(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}$. Наше уравнение принимает

вид $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{5(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}$. 1) $x=0$ — корень уравнения. 2) При $x\neq 0$ делим обе части на $\sin\dfrac{x}{2}$

и приводим уравнение к виду $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{8}$. Так как $x/2\in(-\pi/4;\pi/4)$, то $\cos\dfrac{x}{2}>0$ и уравнение

приходит к виду $\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{5}{8}}$. На интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ это уравнение имеет два решения

$x=\pm 2\arccos\sqrt{5/8}$. Всего три решения.

Ответ: 3.

Задача 6

Пассажир прошел по движущемуся эскалатору, вступив на 30 ступеней. В следующий раз он шел с той же скоростью навстречу движению эскалатора и вступил на 45 ступеней. На сколько ступеней вступит пассажир, если ему придется идти по неподвижному эскалатору?

Решение:

Пусть лента эскалатора имеет протяженность в n ступеней. При движении по неподвижному эскалатору пассажир вступает на n ступеней и продвигается вперед на n ступеней. Если пассажир идет в направлении движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 30 ступеней, а эскалатор перемещается на $n-30$ ступеней.

Если пассажир идет против движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 45 ступеней, а эскалатор перемещается на $45-n$ ступеней. Поскольку скорость движения пассажира сохранилась, равны отношения перемещений пассажира и эскалатора.

$$\frac{n-30}{30}=\frac{45-n}{45},\ 3(n-30)=2(45-n),\ 5n=180,\ n=36.$$

Ответ: 36.

Задача 7

Три автосалона продавали автомобили стандартной и улучшенной комплектаций. Автомобили улучшенной комплектации имели и повышенную цену. Во всех салонах цены были одинаковыми. Первый салон продал 11 автомобилей, второй — 21, третий — 29, причем в каждом пункте продаж был продан хотя бы один стандартный автомобиль. Выручка салонов оказалась одинаковой. Найдите наименьшее возможное число проданных автомобилей улучшенной комплектации.

Решение:

Обозначим через $k,\ m,\ n$ число улучшенных автомобилей, проданных первым, вторым и третьим автосалонами соответственно. По стандартным ценам салоны продали $11-k,\ 21-m,\ 29-n$ автомобилей. Ясно, что $k>m>n$. Обозначим через x и y $(x<y)$ цены стандартной и улучшенной комплектаций. Выручки салонов равны соответственно

$$(11-k)x+ky,\ (21-m)x+my,\ (29-n)x+ny.$$

По условию выручки салонов одинаковы. Получаем уравнения

$$(11-k)x+ky=(21-m)x+my=(29-n)x+ny.$$

Из левого равенство получается, что

$$(k-m)y=(10+k-m)x,$$

а из правого —

$$(m-n)y=(8+m-n)x.$$

Разделим первое из полученных равенств на второе.

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{10+(k-m)}{8+(m-n)}.$$

Далее,

$$8(k-m)+(k-m)(m-n)=10(m-n)+(k-m)(m-n),$$

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{5}{4}.$$

Следовательно, $k-m=5i,\ m-n=4i$, где i — натуральное число. Заметим, что первый салон продал $k=n+9i$ дорогих автомобилей. По условию задачи $k \le 10$. Поэтому $i=1$; $k-m=5,\ m-n=4$. Возможны два варианта:

$$1)\ n=0,\ m=4,\ k=9;\ 2)\ n=1,\ m=5,\ k=10.$$

Наименьшее число улучшенных автомобилей получается в первом варианте. Это число равно $0+4+9=13$.

Ответ: 13.

Задача 8

В результате смешения 60 г 60%-го и некоторого количества 10%-го растворов соли получился 25%-й раствор. Сколько получилось 25%-го раствора?

Решение:

Обозначим через x количество 10% -го раствора. В результате смешения получилось $(60+x)$ г раствора. Этот раствор содержит $(0.6\cdot 60+0.1x)$ г соли, раствор имеет концентрацию $\frac{0.6\cdot 60+0.1x}{60+x}$. По условию $\frac{0.6\cdot 60+0.1x}{60+x}=0.25$. Решим полученное уравнение.

$$36+0.1x=15+0.25x,\ 21=0.15x,\ x=140.$$

Всего получилось $60+140=200$ г раствора.

Ответ: 200.

Задача 9

Точки B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, проведённых из вершин B и C соответственно. Известно, что $AB=8,\quad AC=7,\quad \sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{15}}{16}$. Найдите длину отрезка B_1C_1.

Решение:

Обозначим угол $\angle BAC$ через α. Возможны два случая: 1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и 2) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

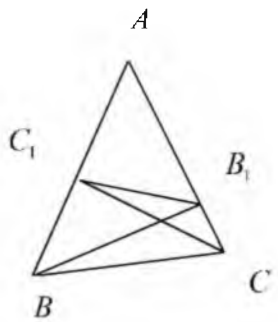
I. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{9\cdot 15}{16^2}}=\frac{\sqrt{256-135}}{16}=\frac{\sqrt{121}}{16}=\frac{11}{16}$.

Из треугольника ABB_1 получаем: $\frac{AB_1}{AB}=\cos\alpha=\frac{11}{16}$. Найдём длину BC.

По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha}=\sqrt{64+49-2\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{11}{16}}=\sqrt{36}=6.$$

Отрезок BC является диаметром окружности, описанной как вокруг треугольника BB_1C, так и вокруг треугольника BC_1C. Следовательно, эта окружность описана вокруг четырёхугольника BC_1B_1C.



Значит, $\angle BC_1B_1+\angle ACB=\pi$. С другой стороны, $\angle BC_1B_1+\angle AC_1B_1=\pi$. Следовательно, $\angle ACB=\angle AC_1B_1$, откуда следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам, т.к. угол $\angle BAC$ - общий. Значит, $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AB_1}{AB}=\cos\alpha$.

Таким образом, $B_1C_1=BC\cdot\cos\alpha=6\cdot\frac{11}{16}=\frac{33}{8}$.

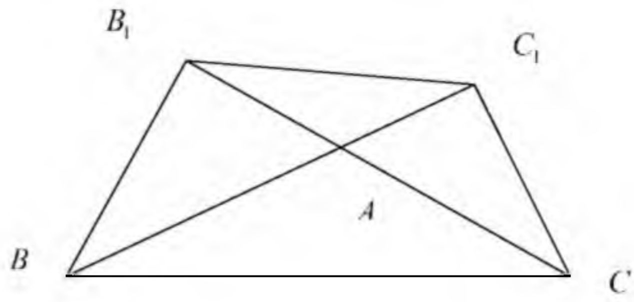
II. Пусть теперь $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Тогда

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9\cdot 15}{16^2}}=-\frac{\sqrt{256-135}}{16}=-\frac{\sqrt{121}}{16}=-\frac{11}{16}.$$

Из треугольника ABB_1 получаем: $\frac{AB_1}{AB}=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{11}{16}$. По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2+2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha}=\sqrt{64+49+2\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{11}{16}}=\sqrt{190}.$$

Как уже было доказано в пункте I, вокруг четырёхугольника BB_1C_1C можно описать окружность. Следовательно, $\angle BC_1B_1 = \angle B_1CB$ как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Кроме того, $\angle B_1AC_1 = \angle BAC$ как вертикальные углы, откуда и следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам. Значит,



$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} = \cos(\pi - \alpha) = \frac{11}{16} \text{ и } B_1C_1 = BC \cdot \cos(\pi - \alpha) = BC \cdot \frac{11}{16} = \frac{11 \cdot \sqrt{190}}{16}.$$

Ответ: $B_1C_1 = \dfrac{33}{8}$ или $B_1C_1 = \dfrac{11 \cdot \sqrt{190}}{16}$.

Задача 10

При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-1}{|2x+1|-|x+2|} = ax^2$ имеет не более одного корня?

ОДЗ: Знаменатель обращается в 0, если $2x+1 = \pm(x+1)$, т.е. при $x = \pm 1$. Для уравнения допустимы все x, кроме $x = \pm 1$.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби на $|2x+1| + |x+2| > 0$.

$$\frac{(x^2-1)(|2x+1|+|x+2|)}{(2x+1)^2-(x+2)^2} = ax^2,$$

$$\frac{(x^2-1)(|2x+1|+|x+2|)}{3(x^2-1)} = ax^2,$$

$$|2x+1| + |x+2| = 3ax^2. \qquad (*)$$

Если $a \le 0$, то левая часть > 0, а правая — ≤ 0; уравнение (*) не имеет решений.

Если $a > 0$, уравнение (*) имеет по крайней мере 2 решения.

Исходное уравнение может иметь меньшее число решений, только если хотя бы одно из чисел ± 1 — решение (*).

1 — решение (*), если $6 = 3a,\ a = 2$; (-1) — решение (*), если $2 = 3a,\ a = 2/3$.

При $a=2$ уравнение (*) принимает вид $\left|2x+1\right|+\left|x+2\right|=6x^2$ и имеет корни $x_1=-1/2,\ x_2=1$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x=-1/2$.

При $a=2/3$ уравнение (*) принимает вид $\left|2x+1\right|+\left|x+2\right|=2x^2$ и имеет корни $x_1=-1,\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Ответ: уравнение имеет не более одного корня при $a\le 0$, при $a=2/3$ и при $a=2$.