ВАРИАНТ 1

1.	32
2.	16
3.	$5/2$
4.	1000
5.	-2
6.	$1/5$
7.	$\pm(2;-2)$
8.	61
9.	48
10.	-1, 8, 24

ВАРИАНТ 2

1.	12
2.	11
3.	$5/8$
4.	128
5.	6
6.	$1/7$
7.	$\pm(1;-1)$
8.	19
9.	$128\sqrt{3}$
10.	12

ВАРИАНТ 3

1.	14
2.	13
3.	$5/4$
4.	243
5.	$-1/4$
6.	$1/6$
7.	$\pm(3;-3)$
8.	37
9.	36
10.	-1, 24, 48

ВАРИАНТ 4

1.	18
2.	12
3.	$5/8$
4.	125
5.	$13/4$
6.	$1/8$
7.	$\pm(4;-4)$
8.	91
9.	$12\sqrt{3}$
10.	48

ВАРИАНТ 1

1. Дмитрию вдвое больше лет, чем Григорию было тогда, когда Дмитрию было столько лет, сколько Григорию теперь. Когда Григорию станет столько лет, сколько Дмитрию теперь, тогда сумма их возрастов будет равна 72 годам. Сколько лет Дмитрию?

   РЕШЕНИЕ

   Пусть возраст Дмитрия — x лет, а возраст Григория — y лет. Из условия следует, что Дмитрий старше Григория, разность возрастов — $x-y$. $x-y$ лет тому назад Дмитрию было столько лет, сколько теперь Григорию, а Григорию было, соответственно, $y-(x-y)=2y-x$ лет. По условию $x=2(2y-x)$, т.е. $3x=4y$. Через $x-y$ лет Григорию станет столько лет, сколько Дмитрию теперь, т.е. x лет, Дмитрию будет $2x-y$ лет. Известно, что $x+(2x-y)=72$, т.е. $3x-y=72$. Получена система уравнений

$$\begin{cases} 3x-4y=0, \\ 3x-y=72. \end{cases}$$

   Вычитая первое уравнение из второго, получаем $3y=72,\ y=24$. Первое уравнение дает $x=32$.

   ОТВЕТ: 32

2. В тесте есть 10 сложных и 20 простых задач. Для решения каждой сложной задачи требуется 40 мин., а для простой — 10 мин. За решение сложной задачи начисляется 3 балла, простой — 1 балл. Абитуриент решал задачи не более 190 мин. и решил не более 10 задач. Какое максимальное число очков он мог получить?

   РЕШЕНИЕ

   За 40 минут можно решить одну сложную задачу и получить 3 балла или решить четыре простых задачи и получить 4 балла. Видим, что лучше решать простые задачи. За 190 минут можно решить 19 простых задач. Но абитуриент решил не более 10 задач. В такой ситуации целесообразно решить несколько сложных задач. Если все 10 задач выбрать простыми, то потребуется 100 минут. Замена простой задачи на сложную увеличивает продолжительность работы на 30 мин. и дает 2 дополнительных балла. Мы имеем запас времени 90 мин. Следует заменить три простых задачи сложными. Решение 7 простых и 3 сложных задач даст $7\cdot 1+3\cdot 3=16$ баллов.

   ОТВЕТ: 16.

3. Найдите рациональное число – значение выражения

$$4\sin^6(\pi/16)+4\sin^6(9\pi/16)-3\sqrt{2}/4.$$

   РЕШЕНИЕ

Проведем следующие преобразования:

$$4\sin^6(\pi/16)+4\sin^6(9\pi/16)-3\sqrt{2}/4=4\sin^6(\pi/16)+4\cos^6(\pi/16)-3\sqrt{2}/4=$$
$$=4\left(\sin^2(\pi/16)+\cos^2(\pi/16)\right)\left(\sin^4(\pi/16)-\sin^2(\pi/16)\cos^2(\pi/16)+\cos^4(\pi/16)\right)-3\sqrt{2}/4=$$
$$=4\left(\left(\sin^2(\pi/16)+\cos^2(\pi/16)\right)^2-3\sin^2(\pi/16)\cos^2(\pi/16)\right)-3\sqrt{2}/4=$$
$$=4\left(1-\frac{3}{4}\sin^2(\pi/8)\right)-3\sqrt{2}/4=4-3\sin^2(\pi/8)-3\sqrt{2}/4=$$
$$=4-\frac{3}{2}\left(1-\cos(\pi/4)\right)-3\sqrt{2}/4=4-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-3\sqrt{2}/4=\frac{5}{2}$$

ОТВЕТ: $\frac{5}{2}$.

4. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{\lg(10x)}-\sqrt{\lg x}}-\sqrt{\lg x}=2$.

РЕШЕНИЕ

Положим $y=\lg x$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}-\sqrt{y}=2.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{y+1}+\sqrt{y}$, получаем

$$\sqrt{y+1}+\sqrt{y}-\sqrt{y}=2,\ \sqrt{y+1}=2,\ y+1=4,\ y=3.$$

Для неизвестного x получается значение $x=10^3=1000$.

ОТВЕТ: 1000.

5. Найдите наименьшее значение функции $y=\sin 2x+2(\sin x+\cos x)$.

РЕШЕНИЕ

Положим $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Множеством значений переменной t является отрезок $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

Заметим, что

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x.$$

Для функции y получается выражение $y=t^2+2t-1$. Квадратный трехчлен $t^2+2t-1=(t+1)^2-2$ принимает при $t=-1$ свое наименьшее значение (-2). Значение (-1) является возможным для переменной t. Наименьшее значение функции y равно (-2).

ОТВЕТ: -2.

6. Отношение суммы n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ к сумме величин, им обратных, равно 1/5. Найдите произведение $b_1 b_n$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$. Сумма n членов равна

$$S_n = b_1\left(1+q+\cdots+q^{n-1}\right).$$

Числа $\frac{1}{b_n}$ тоже образуют геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{1}{b_1}$ и знаменателем $\frac{1}{q}$. Сумма n членов равна

$$T_n = \frac{1}{b_1}\left(1+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{1}{b_1 q^{n-1}}\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1\right) = \frac{1}{b_n}\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1\right).$$

По условию $5S_n = T_n$. Поэтому $5b_1 = \frac{1}{b_n},\ b_1 b_n = \frac{1}{5}$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{5}$.

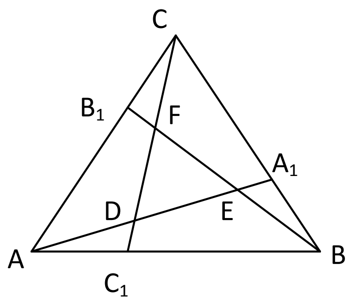
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 - y^4 = \sqrt{|y|} - \sqrt{|x|} \\ x^2 - 3xy = 16 \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 + \sqrt{t}$, определенную для $t \ge 0$. Эта функция строго возрастает. Первое уравнение системы можно записать в виде $f(|x|) = f(|y|)$. С учетом строгого возрастания функции получаем равенство $|x| = |y|$, $y = \pm x$. Если взять $y = x$. Второе уравнение принимает вид $x^2 - 3x^2 = 16,\ -2x^2 = 16,\ x^2 = -8$. Последнее же уравнение не имеет решений. Поэтому принимаем $y = -x$. Из второго уравнения получаем $x^2 + 3x^2 = 16,\ 4x^2 = 16,\ x^2 = 4,\ x = \pm 2,\ y = \mp 2$.

ОТВЕТ: $(2, -2), (-2, 2)$

8. На сторонах BC, CA, AB правильного треугольника ABC со стороной 9 взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.



РЕШЕНИЕ

Треугольники ABA_1, BCB_1, CAC_1 равны по сторонам и углу между ними, треугольники ADC_1, BEA_1, CFB_1 равны по стороне и углам. Треугольник ADC_1 подобен ABA_1 по двум углам, треугольник ABC подобен

DEF . Обозначим $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ABA_1}$, $S_2 = S_{AC_1D}$, $S_0 = S_{DEF}$. Тогда

$$AA_1 = \sqrt{AB^2 + BA_1^2 - 2AB \cdot BC_1 \cos 60^\circ} = \sqrt{81+16-36} = \sqrt{61} ,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AC_1}{AA_1}\right) = \frac{16}{61}, \frac{S_1}{S} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{4}{9},$$

$$S_0 = S - 3S_1 + 3S_2 = S - 3\cdot\frac{4}{9}S + 3\cdot\frac{16}{61}\cdot\frac{4}{9}S = \frac{S}{61}, \frac{S}{S_0} = 61.$$

ОТВЕТ: 61.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD = 4, CB = CD = 3$, а стороны AB и BC взаимно перпендикулярны. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем V пирамиды, зная, что $V > 12$.

РЕШЕНИЕ

В основании пирамиды лежит четырехугольник, составленный из двух равных прямоугольных треугольников. Площадь основания равна $S = 4\cdot 3 = 12$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется на плоскость основания в точку, одинаково удаленную от прямых AB, BC, CD, DA . Вершина может проектироваться в центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, или в центр вневписанной окружности. В первом случае обозначим через r радиус вписанной окружности и заметим, что площадь основания $S = pr$, где p — полупериметр основания, $p = AB + BC = 4 + 3 = 7$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{7}$. Высота пирамиды $H = r \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{12}{7}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}12\cdot\frac{12}{7} = \frac{144}{21} < 12$.

Поэтому мы должны рассматривать второй случай с вневписаннной окружностью. Пусть r_1 — радиус вневписанной окружности. На этот раз

$$S = \frac{1}{2}\left(AB - BC - CD + DA\right)r_1,\ r_1 = 12.$$

Как и в первом случае, $H = r_1 \operatorname{tg} 45^\circ = 12$, $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}12\cdot 12 = 48 > 12$

ОТВЕТ: 48.

10. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = a(x^2 - 4x + 3)$ имеет ровно три различных решения ?

РЕШЕНИЕ

Заметим, что

$$x^4 - 10x^2 + 9 = \left(x^2 - 9\right)^2 \left(x^2 - 1\right) = \left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right) = \left(x^2 - 4x + 3\right)\left(x^2 + 4x + 3\right).$$

Уравнение можно записать в виде

$$\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+4x+3-a\right)=0 .$$

Решениями нашего уравнения будут корни квадратного уравнения $x^2-4x+3=0$, т.е. числа $x_1=1,\ x_2=3$ и корни квадратного уравнения

$$x^2+4x+3-a=0 .$$

Общее число решений окажется равным трем, если последнее уравнение имеет один корень x_3, причем $x_3 \neq x_1,\ x_3 \neq x_2$, или это уравнение имеет два корня $x_3,\ x_4$, один из которых совпадает с x_1 или x_2.

Уравнение $x^2+4x+3-a=0$ имеет единственный корень, если $a=-1$, этот корень $x_3=-2$ отличен от x_1 и от x_2.

Число x_1 является корнем уравнения $x^2+4x+3-a=0$, если $1^2+4\cdot 1+3-a=0$, т.е. $a=8$. В такой ситуации мы получаем уравнение $x^2+4x-5=0$, имеющее корни $x_1=1$ и $x_3=-5$. При $a=8$ исходное уравнение имеет в точности три корня.

Число x_2 является корнем уравнения $x^2+4x+3-a=0$, если $3^2+4\cdot 3+3-a=0$, т.е. $a=24$. В такой ситуации мы получаем уравнение $x^2+4x+-21=0$, имеющее корни $x_2=3$ и $x_3=-7$. При $a=24$ исходное уравнение имеет в точности три корня.

ОТВЕТ: $-1,\ 8,\ 24$.

ВАРИАНТ 2

1. Ивану втрое больше лет, чем Петру было тогда, когда Ивану было столько лет, сколько Петру теперь. Когда Петру станет столько лет, сколько Ивану теперь, тогда сумма их возрастов будет равна 42 годам. Сколько лет Петру?

   РЕШЕНИЕ

   Пусть возраст Ивана — x лет, а возраст Петра — y лет. Из условия следует, что Иван старше Петра, разность возрастов — $x-y$. $x-y$ лет тому назад Ивану было столько лет, сколько теперь Петру, а Петру было, соответственно, $y-(x-y)=2y-x$ лет. По условию $x=3(2y-x)$, т.е. $4x=6y,\ 2x=3y$. Через $x-y$ лет Петру станет столько лет, сколько Ивану теперь, т.е. x лет, Петру будет $2x-y$ лет. Известно, что $x+(2x-y)=42$, т.е. $3x-y=42$. Получена система уравнений

   $$\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-y=42. \end{cases}$$

   Вычтем из второго уравнения, умноженного на 3, первое уравнение, получим $7x=3\cdot 42,\ x=18$. Из первого уравнения получаем $y=12$.

   ОТВЕТ: 12.

2. В тесте есть 10 сложных и 15 простых задач. Для решения каждой сложной задачи требуется 30 мин., а для простой — 10 мин. За решение сложной задачи начисляется 2 балла, простой — 1 балл. Абитуриент решал задачи не более 120 мин. и решил не более 10 задач. Какое максимальное число очков он мог получить?

   РЕШЕНИЕ

   За 30 минут можно решить одну сложную задачу и получить 2 балла или решить три простых задачи и получить 3 балла. Видим, что лучше решать простые задачи. За 120 минут можно решить 12 простых задач. Но абитуриент решил не более 10 задач. В такой ситуации целесообразно решить одну сложную задачу. Решение 9 простых и 1 сложной задач займет $9\cdot 10+3=120$ минут и принесет $9\cdot 1+1\cdot 2=11$ баллов.

   ОТВЕТ: 11.

3. Найдите рациональное число – значение выражения

   $$\sin^6(\pi/16)+\cos^6(15\pi/16)-3\sqrt{2}/16.$$

   РЕШЕНИЕ

   Проведем следующие преобразования:

$$\sin^6(\pi/16)+\sin^6(9\pi/16)-3\sqrt{2}/16=\sin^6(\pi/16)+\cos^6(\pi/16)-3\sqrt{2}/16$$
$$=\left(\sin^2(\pi/16)+\cos^2(\pi/16)\right)\left(\sin^4(\pi/16)-\sin^2(\pi/16)\cos^2(\pi/16)+\cos^4(\pi/16)\right)-3\sqrt{2}/16=$$
$$=\left(\left(\sin^2(\pi/16)+\cos^2(\pi/16)\right)^2-3\sin^2(\pi/16)\cos^2(\pi/16)\right)-3\sqrt{2}/16=$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2(\pi/8)-3\sqrt{2}/16=1-\frac{3}{8}\left(1-\cos(\pi/4)\right)-3\sqrt{2}/16=1-\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-3\sqrt{2}/16=\frac{5}{8}$$

ОТВЕТ: $\frac{5}{8}$.

4. Решите уравнение $\frac{2}{\sqrt{\log_2(4x)}-\sqrt{\log_2 x}}-\sqrt{\log_2 x}=3$.

РЕШЕНИЕ

Положим $y=\log_2 x$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sqrt{y+2}-\sqrt{y}}-\sqrt{y}=3.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{y+2}+\sqrt{y}$, получаем

$$\sqrt{y+2}+\sqrt{y}-\sqrt{y}=3,\ \sqrt{y+2}=3,\ y+2=9,\ y=7.$$

Для неизвестного x получается значение $x=2^7=128$.

ОТВЕТ: 128.

5. Найдите наибольшее значение функции $y=\sin 2x+2(\sin x-\cos x)+4$.

РЕШЕНИЕ

Положим $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Множеством значений переменной t является отрезок $\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$.

Заметим, что

$$t^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-\sin 2x.$$

Для функции y получается выражение $y=-t^2+2t+5$. Квадратный трехчлен $-t^2+2t+5=-\left(t-1\right)^2+6$ принимает при $t=1$ свое наибольшее значение 6. Значение 1 является возможным для переменной t. Наименьшее значение функции y равно 6.

ОТВЕТ: 6.

6. Отношение суммы n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ к сумме величин, им обратных, равно 1/7. Найдите произведение $b_1 b_n$.

РЕШЕНИЕ

Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$. Сумма n членов равна

$$S_n = b_1\left(1+q+\cdots+q^{n-1}\right).$$

Числа $\dfrac{1}{b_n}$ тоже образуют геометрическую прогрессию с первым членом $\dfrac{1}{b_1}$ и знаменателем $\dfrac{1}{q}$. Сумма n членов равна

$$T_n = \frac{1}{b_1}\left(1+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{1}{b_1 q^{n-1}}\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1\right) = \frac{1}{b_n}\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1\right).$$

По условию $7S_n = T_n$. Поэтому $7b_1 = \dfrac{1}{b_n},\ b_1 b_n = \dfrac{1}{7}$.

ОТВЕТ: $\dfrac{1}{7}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^6 - y^6 = 2\sqrt{|y|} - 2\sqrt{|x|} \\ x^2 - 5xy = 6 \end{cases}$.

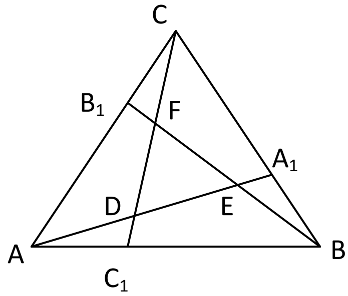
РЕШЕНИЕ

Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 + 2\sqrt{t}$, определенную для $t \geq 0$. Эта функция строго возрастает. Первое уравнение системы можно записать в виде $f(|x|) = f(|y|)$. С учетом строгого возрастания функции получаем равенство $|x| = |y|$, $y = \pm x$. Если взять $y = x$. Второе уравнение принимает вид $x^2 - 5x^2 = 6,\ -4x^2 = 6,\ 4x^2 = -6$. Последнее же уравнение не имеет решений. Поэтому принимаем $y = -x$. Из второго уравнения получаем $x^2 + 5x^2 = 6,\ 6x^2 = 6,\ x^2 = 1,\ x = \pm 1,\ y = \mp 1$.

ОТВЕТ: $(1, -1), (-1, 1)$

8. На сторонах BC, CA, AB правильного треугольника ABC со стороной 10 взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.

РЕШЕНИЕ



Треугольники ABA_1, BCB_1, CAC_1 равны по сторонам и углу между ними, треугольники ADC_1, BEA_1, CFB_1 равны по стороне и углам. Треугольник ADC_1 подобен ABA_1 по двум углам, треугольник ABC подобен DEF. Обозначим $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ABA_1}$, $S_2 = S_{AC_1D}$,

$S_0 = S_{DEF}$. Тогда

$$AA_1 = \sqrt{AB^2 + BA_1^2 - 2AB \cdot BC_1 \cos 60^\circ} = \sqrt{100+16-40} = \sqrt{76},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AC_1}{AA_1}\right) = \frac{4}{19}, \ \frac{S}{S_1} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{2}{5},$$

$$S_0 = S - 3S_1 + 3S_2 = S - 3\cdot\frac{2}{5}S + 3\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{2}{5}S = \frac{S}{19}, \ \frac{S}{S_0} = 19.$$

ОТВЕТ: 19.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD = 8,\ CB = CD = 6$, а стороны AB и BC взаимно перпендикулярны. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем V пирамиды, зная, что $V > 50$.

РЕШЕНИЕ

В основании пирамиды лежит четырехугольник, составленный из двух равных прямоугольных треугольников. Площадь основания равна $S = 8\cdot 6 = 48$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется на плоскость основания в точку, одинаково удаленную от прямых $AB,\ BC,\ CD,\ DA$. Вершина может проектироваться в центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, или в центр вневписанной окружности. В первом случае обозначим через r радиус вписанной окружности и заметим, что площадь основания $S = pr$, где p — полупериметр основания, $p = AB + BC = 8 + 6 = 14$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{7}$. Высота пирамиды $H = r\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{24}{7\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{7}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}48\cdot\frac{8\sqrt{3}}{7} = \frac{128\sqrt{3}}{7} < 50$. Поэтому мы должны рассматривать второй случай с вневписаннной окружностью. Пусть r_1 — радиус вневписанной окружности. На этот раз

$$S = \frac{1}{2}\left(AB - BC - CD + DA\right)r_1, \ r_1 = 24.$$

Как и в первом случае, $H = r_1\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 8\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}48\cdot 8\sqrt{3} = 128\sqrt{3} > 50$

ОТВЕТ: $128\sqrt{3}$.

10. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = a(x^2 - 2x - 3)$ имеет ровно три различных решения?

РЕШЕНИЕ

Заметим, что

$$x^4 - 10x^2 + 9 = \left(x^2 - 3\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2 - 2x - 3\right)\left(x^2 + 2x - 3\right).$$

Уравнение можно записать в виде

$$\left(x^2 - 2x - 3\right)\left(x^2 + 2x - 3 - a\right) = 0.$$

Решениями нашего уравнения будут корни квадратного уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$, т.е. числа $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ и корни квадратного уравнения

$$x^2 + 2x - 3 - a = 0.$$

Общее число решений окажется равным трем, если последнее уравнение имеет один корень x_3, причем $x_3 \neq x_1,\ x_3 \neq x_2$, или это уравнение имеет два корня $x_3,\ x_4$, один из которых совпадает с x_1 или x_2.

Уравнение $x^2 + 2x - 3 - a = 0$ имеет единственный корень, если $a = -4$, но этот корень $x_3 = -1$ совпадает с x_1.

Число x_1 является корнем уравнения $x^2 + 2x - 3 - a = 0$, если $\left(-1\right)^2 + 2\left(-1\right) - 3 - a = 0$, т.е. $a = -4$ и мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю.

Число x_2 является корнем уравнения $x^2 + 2x - 3 - a = 0$, если $3^2 + 2 \cdot 3 - 3 - a = 0$, т.е. $a = 12$. В такой ситуации мы получаем уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$, имеющее корни $x_2 = 3$ и $x_3 = -5$. При $a = 12$ исходное уравнение имеет в точности три корня.

ОТВЕТ: 12.

ВАРИАНТ 3

1. Дмитрию втрое больше лет, чем Григорию было тогда, когда Дмитрию было столько лет, сколько Григорию теперь. Когда Григорию станет столько лет, сколько Дмитрию теперь, тогда сумма их возрастов будет равна 49 годам. Сколько лет Григорию?
   Решение: Пусть в прошлом Григорию было y лет, а Дмитрию x лет. Тогда сейчас Григорию x лет, а Дмитрию $3y$ лет. В будущем Григорию станет $3y$ лет, а Дмитрию z лет, причем по условию, $z+3y=49$. Так как $z-3y=3y-x; 3y-x=x-y$, то $9y-x=49$ и $x=2y$. Отсюда получаем, что $x=14, y=7$. Сейчас Григорию 14 лет. Ответ: 14.
2. В тесте есть 10 сложных и 10 простых задач. Для решения каждой сложной задачи требуется 25 мин., а для простой — 10 мин. За решение сложной задачи начисляется 3 балла, простой — 1 балл. Абитуриент решал задачи не более 120 мин. и решил не менее 8 задач. Какое максимальное число очков он мог получить?
   Решение: Пусть x - количество сложных задач решенных абитуриентом, y - количество простых задач. Тогда из условия следует, что $25x+10y\le 120;\ x+y\ge 8$. Абитуриент набрал $3x+y$ баллов. Если x принимает значения 0, то максимальное значение y равно 12 и абитуриент наберет 12 баллов. Если x принимает значения 1, то максимальное значение y равно 9 и абитуриент наберет 12 баллов. Если x принимает значения 2, то максимальное значение y равно 7 и абитуриент наберет 13 баллов. Для $x=3$ из первого ограничения следует, что y не превосходит 4, что противоречит второму неравенству. Значит этот случай невозможен. Аналогично, невозможен случай, когда $x=4$. При $x>4$ первое неравенство не имеет решений в целых неотрицательных числах. Ответ: 13.
3. Найдите рациональное число – значение выражения

$$2\cos^6(5\pi/16)+2\sin^6(11\pi/16)+3\sqrt{2}/8.$$

Решение: По формуле приведения искомое выражение равно $2\cos^6(5\pi/16)+2\sin^6(5\pi/16)+3\sqrt{2}/8$. По формуле суммы кубов имеем: $\cos^6(5\pi/16)+\sin^6(5\pi/16)=1-\dfrac{3\sin^2(10\pi/16)}{4}$. Поэтому наше выражение принимает вид: $2-\dfrac{3\sin^2(10\pi/16)}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=2-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1-\cos(5\pi/4)}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\dfrac{5}{4}$. Ответ: 5/4.

4. Решите уравнение $\dfrac{4}{\sqrt{\log_3(81x)}+\sqrt{\log_3 x}}+\sqrt{\log_3 x}=3$.

Решение: Используя свойства логарифма, наше уравнение можно переписать в виде $\dfrac{4}{\sqrt{4+\log_3 x}+\sqrt{\log_3 x}}+\sqrt{\log_3 x}=3$. Пусть $t=\log_3 x$. Тогда $\dfrac{4}{\sqrt{4+t}+\sqrt{t}}+\sqrt{t}=3$. Умножив числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{t+4}-\sqrt{t}$, мы приходим к уравнению $\sqrt{t+4}=3$. Отсюда получаем, что $t=5$ и $x=3^5=243$. Ответ: 243.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = \sin 2x - (\sin x + \cos x) + 1$.

Решение: Пусть $t = \sin x + \cos x$. Тогда $t^2 = 1 + \sin 2x$ и $y = t^2 - t$.

При этом , $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Эта функция достигает минимума при $t = 1/2$ и этот минимум равен $-1/4$. Ответ: $-1/4$.

6. Сумма n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ в 6 раз меньше суммы величин, им обратных. Найдите произведение $b_1 b_n$.

Решение: Пусть $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$, $S_n^1 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_n}$. Тогда

$b_1 b_n S_n^1 = \frac{b_1 b_n}{b_1} + \frac{b_1 b_n}{b_2} + ... + \frac{b_1 b_n}{b_n} = b_n + b_{n-1} + ... + b_1 = S_n$. Отсюда получаем: $b_1 b_n = \frac{S_n}{S_n^1} = \frac{1}{6}$.

Ответ: 1/6

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 - y^4 = 3\sqrt{|y|} - 3\sqrt{|x|} \\ x^2 - 2xy = 27 \end{cases}$.

Решение: Запишем систему в виде $\begin{cases} x^4 + 3\sqrt{|x|} = y^4 + 3\sqrt{|y|} \\ x^2 - 2xy = 27 \end{cases}$. Функция $z = s^4 + 3\sqrt{|s|}$ четная и, кроме того, она возрастает на $[0; +\infty)$. Поэтому, из первого уравнения находим, что $x = y$ или $x = -y$. Подставляя $x = y$ во второе уравнение, видим, что решений нет. Если $x = -y$, то $x_1 = 3, y_1 = -3;\ x_2 = -3; y_2 = 3$. Ответ : $\pm(3, -3)$.

8. На сторонах $BC,\ CA,\ AB$ правильного треугольника ABC со стороной 7 взяты точки $A_1,\ B_1,\ C_1$ соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 3$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, образованного прямыми $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$.

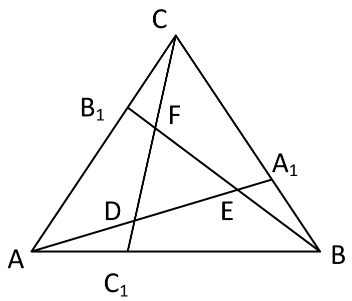
Решение:

Треугольники $ABA_1,\ BCB_1,\ CAC_1$ равны по сторонам и углу между ними, треугольники $ADC_1,\ BEA_1,\ CFB_1$ равны по стороне и углам. Треугольник ADC_1 подобен ABA_1 по двум углам, треугольник ABC подобен DEF. Обозначим $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ABA_1}$, $S_2 = S_{AC_1D}$, $S_0 = S_{DEF}$. Тогда

$$AA_1 = \sqrt{AB^2 + BA_1^2 - 2AB \cdot BC_1 \cos 60^\circ} = \sqrt{49 + 9 - 21} = \sqrt{37},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AC_1}{AA_1}\right)^2 = \frac{9}{37},\ \frac{S_1}{S} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{3}{7},$$

$$S_0 = S - 3S_1 + 3S_2 = S - 3 \cdot \frac{3}{7} S + 3 \cdot \frac{9}{37} \cdot \frac{3}{7} S = \frac{S}{37},\ \frac{S}{S_0} = 37.$$



ответ: 37.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD = 6,\ CB = CD = 3$, а стороны AB и BC взаимно перпендикулярны. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Найдите объем V пирамиды, зная, что $V > 12$.

Решение: В основании пирамиды лежит четырехугольник, составленный из двух равных прямоугольных треугольников. Площадь основания равна $S = 6 \cdot 3 = 18$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется на плоскость основания в точку, одинаково удаленную от прямых $AB,\ BC,\ CD,\ DA$. Вершина может проектироваться в центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, или в центр вневписанной окружности. В первом случае обозначим через r радиус вписанной окружности и заметим, что площадь основания $S = pr$, где p — полупериметр основания, $p = AB + BC = 9$. Радиус вписанной окружности $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{12}{7}$. Высота пирамиды $H = r\operatorname{tg}45° = 2$. Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3}18 \cdot 2 = 12$. Поэтому мы должны рассматривать второй случай с вневписаннной окружностью. Пусть r_1 — радиус вневписанной окружности. На этот раз

$$S = \frac{1}{2}\left(AB - BC - CD + DA\right)r_1,\ r_1 = 6 .$$

Как и в первом случае, $H = r_1\operatorname{tg}45° = 6$, $V = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3}18 \cdot 6 = 36 > 12$

ОТВЕТ: 36.

10. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 20x^2 + 64 = a(x^2 + 6x + 8)$ имеет ровно три различных решения ? .

Решение: Разложим на множители правую и левую части уравнения: $(x-2)(x+2)(x-4)(x+4) = a(x+2)(x+4)$. Уравнение можно записать в виде $\left(x+2\right)(x+4)\left(x^2 - 6x + 8 - a\right) = 0$. Очевидно, что -2 и -4 - корни этого уравнения. Нас устраивает ситуация, когда ровно один из корней уравнения $x^2 - 6x + 8 - a = 0$ не совпадает с -2 и -4. Общее число решений окажется равным трем, если последнее уравнение имеет один корень x_3, причем $x_3 \neq x_1,\ x_3 \neq x_2$, или это уравнение имеет два корня $x_3,\ x_4$, один из которых совпадает с x_1 или x_2.

Уравнение $x^2 - 6x + 8 - a = 0$ имеет один корень при $a = -1$ и этот корень отличен от указанных чисел. Числа -2 и -4 являются корнями последнего уравнения при $a = 24$ и $a = 48$, причем вторые корни в этих случаях отличны от -2 и -4. Ответ: $a = -1; 24; 48$.

ВАРИАНТ 4

1. Ивану вдвое больше лет, чем Петру было тогда, когда Ивану было столько лет, сколько Петру теперь. Когда Петру станет столько лет, сколько Ивану теперь, тогда сумма их возрастов будет равна 54 годам. Сколько лет Петру?
   Решение: Пусть в прошлом Петру было y лет, а Ивану x лет. Тогда сейчас Петру x лет, а Ивану $2y$ лет. В будущем Петру станет $2y$ лет, а Ивану z лет, причем по условию, $z+2y=54$. Так как $z-2y=2y-x; 2y-x=x-y$, то $6y-x=54$ и $2x=3y$. Отсюда получаем, что $x=18$. Сейчас Петру 18 лет. Ответ: 18.

2. В тесте есть 10 сложных и 20 простых задач. Для решения каждой сложной задачи требуется 30 мин., а для простой — 10 мин. За решение сложной задачи начисляется 4 балла, простой — 1 балл. Абитуриент решал задачи не более 100 мин. и решил не менее 5 задач. Какое максимальное число очков он мог получить?
   Решение: Пусть x - количество сложных задач решенных абитуриентом, y - количество простых задач. Тогда из условия следует, что $30x+10y\le 100;\ x+y\ge 5$. Абитуриент набрал $4x+y$ баллов. Если x принимает значения 0, то максимальное значение y равно 10 и абитуриент наберет 10 баллов. Если x принимает значения 1, то максимальное значение y равно 7 и абитуриент наберет 11 баллов. Если x принимает значения 2, то максимальное значение y равно 4 и абитуриент наберет 12 баллов. Для $x=3$ из первого ограничения следует, что y не превосходит 1, что противоречит второму неравенству. Значит этот случай невозможен. При $x>3$ первое неравенство не имеет решений в целых неотрицательных числах. Ответ: 12.

3. Найдите рациональное число – значение выражения

$$\cos^6(3\pi/16)+\cos^6(11\pi/16)+3\sqrt{2}/16.$$

Решение: По формуле приведения искомое выражение равно $\sin^6(5\pi/16)+\cos^6(5\pi/16)+3\sqrt{2}/16$. По формуле суммы кубов имеем:
$\cos^6(5\pi/16)+\sin^6(5\pi/16)=1-\dfrac{3\sin^2(10\pi/16)}{4}$. Поэтому наше выражение принимает вид:
$1-\dfrac{3\sin^2(10\pi/16)}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{16}=1-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1-\cos(5\pi/4)}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{2}}{16}=\dfrac{5}{8}$. Ответ: 5/8.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{\log_5(5x)}+\sqrt{\log_5 x}}+\sqrt{\log_5 x}=2$.

Решение: Используя свойства логарифма, наше уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{\sqrt{1+\log_5 x}+\sqrt{\log_5 x}}+\sqrt{\log_5 x}=2$. Пусть $t=\log_5 x$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{t}}+\sqrt{t}=2$.

Умножив числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{t+1}-\sqrt{t}$, мы приходим к уравнению $\sqrt{t+1}=2$. Отсюда получаем, что $t=3$ и $x=5^3=125$. Ответ: 125.

5. Найдите наибольшее значение функции $y=\sin 2x-(\sin x-\cos x)+2$.

Решение: Пусть $t=\sin x-\cos x$. При этом, $t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Тогда $t^2=1-\sin 2x$ и $y=-t^2-t+3$. Эта функция достигает максимума при $t=-1/2$ и этот равен $13/4$. Ответ: $13/4$.

6. Сумма n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ в 8 раз меньше суммы величин, им обратных. Найдите произведение $b_1 b_n$.

Решение: Пусть $S_n=b_1+b_2+...+b_n$, $S_n^1=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_n}$. Тогда

$b_1 b_n S_n^1=\frac{b_1 b_n}{b_1}+\frac{b_1 b_n}{b_2}+...+\frac{b_1 b_n}{b_n}=b_n+b_{n-1}+...+b_1=S_n$. Отсюда получаем: $b_1 b_n=\frac{S_n}{S_n^1}=\frac{1}{8}$.

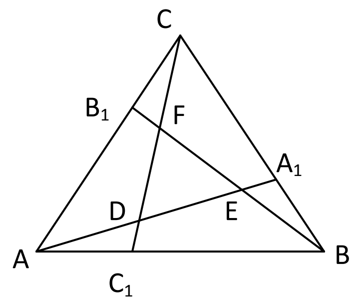
Ответ: 1/8.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^6-y^6=4\sqrt{|y|}-4\sqrt{|x|} \\ x^2-xy=32 \end{cases}$.

Решение: Запишем систему в виде $\begin{cases} x^4+4\sqrt{|x|}=y^4+4\sqrt{|y|} \\ x^2-xy=32 \end{cases}$. Функция $z=s^4+4\sqrt{|s|}$ четная и, кроме того, она возрастает на $[0;+\infty)$. Из первого уравнения находим, что $x=y$ или $x=-y$. Подставляя $x=y$ во второе уравнение, видим, что решений нет. Если $x=-y$, то $x_1=4, y_1=-4;\ x_2=-4; y_2=4$. Ответ : $\pm(4,-4)$.

8. На сторонах BC, CA, AB правильного треугольника ABC со стороной 11 взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Известно, что $AC_1=BA_1=CB_1=5$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.

Решение:



Треугольники ABA_1, BCB_1, CAC_1 равны по сторонам и углу между ними, треугольники ADC_1, BEA_1, CFB_1 равны по стороне и углам. Треугольник ADC_1 подобен ABA_1 по двум углам, треугольник ABC подобен DEF. Обозначим $S=S_{ABC}$, $S_1=S_{ABA_1}$, $S_2=S_{AC_1D}$,

$S_0 = S_{DEF}$. Тогда

$$AA_1 = \sqrt{AB^2 + BA_1^2 - 2AB \cdot BC_1 \cos 60^\circ} = \sqrt{91},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AC_1}{AA_1}\right)^2 = \frac{25}{91},\ \frac{S_1}{S} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{5}{11},$$

$$S_0 = S - 3S_1 + 3S_2 = S - 3\cdot\frac{5}{11}S + 3\cdot\frac{25}{91}\cdot\frac{5}{11}S = \frac{S}{91},\ \frac{S}{S_0} = 91.$$

ответ: 91.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD = 6,\ CB = CD = 2$, а стороны AB и BC взаимно перпендикулярны. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем V пирамиды, зная, что $V > 12$.
Решение: В основании пирамиды лежит четырехугольник, составленный из двух равных прямоугольных треугольников. Площадь основания равна $S = 6\cdot 2 = 12$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется на плоскость основания в точку, одинаково удаленную от прямых $AB,\ BC,\ CD,\ DA$. Вершина может проектироваться в центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, или в центр вневписанной окружности. В первом случае обозначим через r радиус вписанной окружности и заметим, что площадь основания $S = pr$, где p — полупериметр основания, $p = AB + BC = 8$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Высота пирамиды $H = r\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 3\sqrt{3}/2$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH = 6\sqrt{3} < 12$. Поэтому мы должны рассматривать второй случай с вневписаннной окружностью. Пусть r_1 — радиус вневписанной окружности. На этот раз $S = \frac{1}{2}\left(AB - BC - CD + DA\right)r_1,\ r_1 = 3$.
Как и в первом случае, $H = r_1\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 3\sqrt{3}$, $V = \frac{1}{3}SH = 12\sqrt{3} > 12$
ОТВЕТ: $12\sqrt{3}$.

10. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 40x^2 + 144 = a(x^2 + 4x - 12)$ имеет ровно три различных решения ? .
Решение: Разложим на множители правую и левую части уравнения: $(x-2)(x+2)(x-6)(x+6) = a(x-2)(x+6)$. Уравнение можно записать в виде

$\left(x-2\right)(x+6)\left(x^2-4x-12-a\right)=0$. Очевидно, что 2 и -6 - корни этого уравнения. Нас устраивает ситуация, когда ровно один из корней уравнения $x^2-4x-12-a=0$ не совпадает с 2 и -6 Общее число решений окажется равным трем, если последнее уравнение имеет один корень x_3, причем $x_3 \neq x_1,\ x_3 \neq x_2$, или это уравнение имеет два корня $x_3,\ x_4$, один из которых совпадает с x_1 или x_2.

Уравнение $x^2-4x-12-a=0$ имеет один корень при $a=-16$ и этот корень совпадает с 2. Этот случай нас не устраивает. Число 2 является корнем данного уравнения при $a=-16$. Этот случай уже рассмотрен. Число -6 является корнем данного уравнения при $a=48$, причем второй корень в этом случае отличен от 2 и -6- Ответ: $a=48$.