Северо-Восточная олимпиада по математике
2017-2018 учебный год
Заключительный этап

11 класс

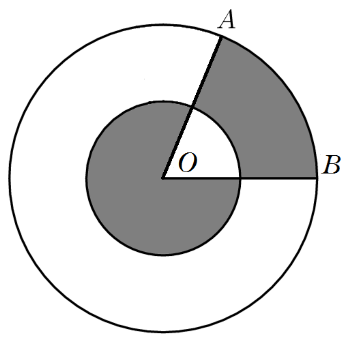
11.1. Петя написал на доске пятизначное число, состоящее из различных четных цифр. Вася стер одну цифру так, чтобы получившееся число делилось на 18. Какую цифру стер Вася?

Ответ: 2.

Решение: Сумма цифр изначально равна 0+2+4+6+8=20. Стирая цифру, Вася отнимает из суммы цифр 0,2,4,6 или 8. Получившееся число делится на 18, т.е. делится на 9, значит, сумма его цифр делится на 9. Поэтому Вася может стереть только 2 (иначе сумма цифр не будет делиться на 9).

Критерии: Только правильный ответ – 1 балл. Написано, что сумма цифр должна делиться на 18, чтобы число делилось на 9 (18) – 5 баллов.

11.2. Два круга с радиусами 1 и 2 имеют общий центр O. Площадь закрашенной области в три раза меньше площади большего круга. Найдите угол $\angle AOB$.



Ответ: $60°$

Решение: Пусть $\angle AOB = \alpha$. Тогда площадь закрашенной части равна $\frac{360°-\alpha}{360°}\pi + 4\frac{\alpha}{360°}\pi - \frac{\alpha}{360°}\pi = (\frac{360°-\alpha}{360°} + 3\frac{\alpha}{360°})\pi$. Площадь большого круга равна 4π. По условию $4\pi = 3(\frac{360°-\alpha}{360°} + 3\frac{\alpha}{360°})\pi, 4 \times 360° = 3(360° - \alpha) + 9\alpha, 1440° = 1080° - 6\alpha, 6\alpha = 360°, \alpha = 60°$.

Критерии: Только правильный ответ – 1 балл. Написана формула вычисления площади сектора – 1 балл. Если доказано, что для угла $60°$ данное отношение площадей выполняется – 4 балла.

11.3. Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ рациональное число.

Решение: Обозначим $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Тогда $x^3=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)=4-3x$; $x^3+3x-4=0$. $0=x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$, $x-1=0$ или $x^2+x+4=0$. Второе уравнение корней не имеет, потому что его дискриминант отрицателен. Отсюда $x=1$ – рациональное число.

Критерии: Написано, что значение данной суммы равна 1 – 1 балл. Найден корень полученного уравнения и не доказано что других корней нет – 5 баллов.

11.4. В ряд выписаны n целых чисел, так чтобы сумма любых семи подряд идущих чисел положительна, а сумма любых одиннадцати подряд идущих чисел отрицательна. При каком наибольшем n это возможно?

Ответ: 16

Решение: Приведем пример для $n=16$:

$$80,-31,-31,-31,-31,80,-31,-31,-31,-31,80,-31,-31,-31,-31,80.$$

Докажем, что для $n\geq 17$ не удастся выписать в ряд числа, удовлетворяющие условию задачи. Составим таблицу для первых 17 чисел из этого ряда

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17}
\end{array}$$

По условию: сумма чисел в каждой строке должна быть отрицательна, а в каждом столбце положительна. Следовательно, сумма всех чисел таблице с одной стороны должна быть положительна, с другой стороны отрицательна. Противоречие.

Критерии: Только правильный ответ – 1 балл. Правильный ответ с примером – 2 балла.

11.5. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2.$$

Чему равно $f(2017)$, если известно, что $f(0)=1$?

Ответ: 2018

Решение: $f(0\cdot 0+1)=f(0)f(0)-f(0)-0+2$, $f(1)=1-1+2=2$,

$$f(2017\cdot 0+1)=f(2017)f(0)-f(0)-2017+2,$$

$$f(1) = f(2017) - 1 - 2017 + 2 = 2$$

$$f(2017) = 2018$$

Критерии: Только за правильный ответ – 1 балл.

6. В пространстве расположены два равных правильных тетраэдра со стороной $\sqrt{6}$. Известно, что их центры совпадают. Докажите, что объем их общей части больше чем $\frac{1}{2}$.

Решение: Несложно заметить, что вписанные шары в эти два правильных тетраэдра совпадают. Следовательно, достаточно доказать, что объем вписанного шара в тетраэдр со стороной $\sqrt{6}$ больше чем $\frac{1}{2}$. Радиус вписанного шара равняется $r = \frac{3V_{\text{шар}}}{4S_{\text{гр}}} = \frac{S_{\text{гр}}h}{4S_{\text{гр}}} = \frac{h}{4} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$. Объем шара равняется $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}\pi = \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$.

Критерии: Есть идея доказательства через вписанную сферу – 3 балла. Вычисление радиуса вписанной сферы – 3 балла.

7. Дана бесконечная последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Докажите, что для любого натурального $k \geq 3$, из этой последовательности можно выделить k членов, являющиеся последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

Решение: Заметим, что числа $\frac{k}{k!}, \frac{k-1}{k!}, \dots, \frac{1}{k!}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии и членами заданной последовательности, потому что $k!$ делится на все числа от 1 до k.