11 класс

Задача 1. Делится ли число $22^4 - 3^8$ на 2015?

Решение	Критерии
Да, делится $22^4 - 3^8 = 22^4 - 9^4 = (22^2 - 9^2)(22^2 + 9^2) = (22-9)(22+9)(22^2+9^2) = 13 \times 31 \times (484+81) =$	Только за ответ – 0 баллов. Если доказано, что данное выражение делится на 5 (13,31) –

$13 \times 31 \times 565$. Т.к. $2015 = 13 \times 31 \times 5$, то данное выражение делится на 2015.	2 балла

Задача 2.Вася записалв тетради несколько последовательных натуральных чисел. Известно, что 50,4% из них нечетные. Сколько чётных чисел записал Вася?

Решение	Критерии
Так как записанные натуральные числа являются последовательными, то чётные и нечётные числа чередуются. По условию нечётных чисел больше, значит, записанная последовательность начинается и заканчивается нечётными числами. Нечётных чисел больше на одно, значит, одно число составляет $(50{,}4 - 49{,}6)\%$ от их общего количества. Следовательно, искомое количество чётных чисел равно $49{,}6 \div (50{,}4 - 49{,}6) = 62$.	Только правильный ответ – 1 балл. Найдено количество нечетных чисел – 5 баллов.

Задача 3. Найдите наибольший корень уравнения $\log_{\sqrt{3-x}-\sqrt{2-x}}(\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}) \geq cos(\pi x)$.

Решение	Критерии
Заметим, что $(\sqrt{3-x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}) = (3-x)-(2-x) = 1$. Следовательно, выражение слева равно -1, при всех$x<2$. Получим неравенство$-1 \geq \cos(\pi x)$. Которое выполняется только в случае равенства. $\cos(\pi x) = -1$. $\pi x = \pi + 2\pi k, k \in Z$. $x = 1 + 2k, k \in Z$.Из того, что $x < 2$,получим наибольшее значение $x = 1$. **Ответ:**$x = 1$	Только правильный ответ – 1 балл. Доказано, что левая часть неравенства равна -1 – 4 балла. Задача решена верно, но найден неправильный ответ – 6 баллов

Задача 4. Дана некоторая7-угольная призма, в которую можно вписать сферу. Найдите площадь поверхности призмы, если известно, что площадь основания равна S.

Решение	Критерии
Пусть S_0– площадь поверхности призмы, r — радиус вписанной сферы, V — объём призмы. Высота призмы равна $2r$. Поэтому $V = 2rS$. Соединив центр сферы со всеми вершинами призмы, разобьём её на пирамиды с вершинами в центре сферы. Тогда $V = \frac{1}{3}S_0 r$. Из уравнения $2rS = \frac{1}{3}S_0 r$ находим, что $S_0 = 6S$.	Только за правильный ответ – 1 балл. Найдена площадь боковой поверхности – 5 баллов

Задача 5. Существует ли такое значения a, при котором уравнение

$$x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 8xa^3 + 10a^4 = 0$$

имеет четыре различных действительных корня?

Решение	Критерии
Известно, между двумя соседними корнями дифференцируемой функции естькорень ее производной. Поэтому достаточно проверить, сколько корней имеет производная функции $f(x) = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 8xa^3 + 10a^4$.Найдем производную	За правильный ответ – 0 баллов. Решение правильное, но содержит арифметические ошибки – 6 баллов.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2a + 12xa^2 + 8a^3 = 4(x+a)^3 + 4a^3$ Видно, что производная имеет ровно один корень, значит, исходное уравнение не может иметь больше двух корней. **Ответ:** Нет, не существует.	

Задача 6. В прямоугольнике $ABCD$диагональ ACв два раза длиннее стороныAB. ТочкаE, лежащая вне прямоугольника $ABCD$, такая, что угол $\angle CED = 120°$. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник CED лежит на прямой OE, где O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

Решение	**Критерии**
В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза АС в два раза длиннее катета АВ. Тогда угол $\angle ACB = 30°$. Следовательно, $\angle COD = 60°$ и треугольник OCD – равносторонний. Тогда четырехугольник $OCED$ вписан в окружность, так как сумма углов $\angle COD$ и $\angle CED$ равна $180°$. Получается, что углы $\angle OEC$ и $\angle OED$ равны, так как опираются на одинаковые дуги. Таким образом OE – биссектриса угла $\angle CED$, то есть центр вписанной окружности лежит на прямой OE	Доказано, что треугольник OCD равносторонний – 3 баллов. Доказано, что четырехугольник $OCED$ вписанный – 5 баллов

Задача 7. На окружности расположены 25 непересекающихся дуг, и на каждой из них написаны два произвольных простых числа. Сумма чисел каждой дуги не меньше произведение чисел дуги, следующей за ней по часовой стрелке. Чему может равняться сумма всех чисел?

Решение	**Критерии**
Обозначим написанные числа через $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{25}, b_{25})$. Заметим, что если $a_i b_i \geq a_i + b_i$, если a_i и b_i– простые числа, так как простые числа не меньше 2. Теперь выпишем условие задачи $a_1 + b_1 \geq a_2 b_2 \geq a_2 + b_2 \geq a_3 b_3 \geq a_3 + b_3 \geq \cdots \geq a_1 + b_1$. Т.е. неравенство выполняется только в случае равенства. Таким образом, $a_i b_i = a_i + b_i$ для всех i. Это равенство выполняется только в случае, если $a_i = b_i = 2$. Значит все числа, написанные на окружности равны 2. Следовательно, сумма чисел равна $2 \times 2 \times 25 = 100$.	Только правильный ответ – 1 балл. Замечено, что произведение двух простых чисел не меньше их суммы – 3 балла.