Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Для школьников 9-10 классов

Заочный тур 2018 год.

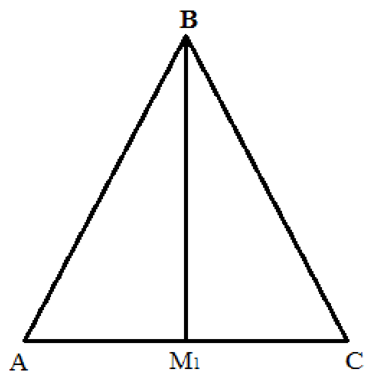
1) Пусть x гр вес одного гамбургера, y – вес одной сосиски, и z – вес одной сардельки. Тогда имеем по условию задачи $\begin{cases} x+3y+2z=240 \\ 2x+4y+5z=440 \end{cases}$

Будем искать такие числа $a и b$, чтобы $a(x+3y+2z)+b(2x+4y+5z)=x+4y+1{,}5z$. Приравнивая последовательно коэффициенты при x, y, z, получим систему $\begin{cases} a+2b=1 \\ 3a+4b=4 \\ 2a+5b=1{,}5. \end{cases}$ Решая ее, находим $a=2, b=\frac{-1}{2}$. А тогда получим, что

$x+4y+1{,}5z=2*240-\frac{1}{2}*440=260$. Ответ: 260 гр.

2) Преобразуем выражение в числителе: $1*2+2*3+3*4+\ldots+2016*2017=2(1+3)+4(3+5)+\ldots++2016*(2015+2017)=2(2^2+4^2+6^2+\ldots$

. Поэтому дробь равна 2. Ответ: $\{2\}$.

3) 

Проведем высоту BM_1 на сторону AC. Пусть $M_1C=x$. Тогда по т.Пифагора $AB^2-AM_1^2=BM_1^2; CB^2-CM_1^2=BM_1^2$.

Отсюда $25-(4-x)^2=17-x^2 \Rightarrow x=¿1,$ т.е точка M_1 совпадает с точкой M. Но тогда центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой его гипотенузы. А тогда расстояние между центрами окружностей равно средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC. А так как $AC=4$, то искомое расстояние равно 2. Ответ: $\{2\}$.

4) Пусть в коробке z яблок и k груш. Вероятность того, что первый фрукт будет яблоко равна $\frac{z}{z+k}$. Вероятность, что второй фрукт также яблоко, при условии, что первый фрукт яблоко, равна $\frac{z-1}{z+k-1}$. Тогда вероятность, что вынуть два яблока равна $\frac{z(z-1)}{(z+k)(z+k-1)}=\frac{1}{2}$. Далее заметим, что $\frac{z}{z+k}>\frac{z-1}{z+k-1}$ $(при\,k>0)$. Тогда имеем неравенство $\left(\frac{z}{z+k}\right)^2>\frac{1}{2}>\left(\frac{z-1}{z+k-1}\right)^2$, отсюда $(для\,z>1)$ получим $\frac{z}{z+k}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{z-1}{z+k-1}$ из левого неравенства имеем $z>(\sqrt{2}+1)k$, из второго неравенства находим, что $(\sqrt{2}+1)k>z-1$, так что $(\sqrt{2}+1)k+1>z>(\sqrt{2}+1)k\Rightarrow при\,k=1$ получим $2{,}414<z<3{,}414$ так что можно взять $z=3$. При этом $z;k$ возьмем 1. Тогда $P(два\,яблока)=\frac{\frac{3}{4}*2}{3}=\frac{1}{2}.$ Следовательно минимальное число фруктов есть 4. Ответ: (4) .

5) Обозначим $x+2=t\geq 0$, тогда
$\sqrt{6-\sqrt{t}}=t-2\Longleftrightarrow 6-\sqrt{t}=t^2-4t+4\Longleftrightarrow t^2-4t+\sqrt{t-2}=¿0;t(t-4)+\sqrt{t}-2=0;t(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)+\sqrt{t}$
следовательно $x=2$. Других решений нет т.к. второй множитель положителен. Ответ: (2) .

6) Запишем исходное уравнение в виде: $44x-11=69(y-x)$, или $11(4x-1)=69(y-x)$. Числа 11 и 69 взаимно простые. Поэтому число $4x-1$ кратно 69, а число $y-x$ кратно 11. Обозначим $4x-1=69k,y-x=11n$, где k,n натуральные числа. Первое соотношение запишем как $4x=68k+k+1\Rightarrow k+1$ делится нацело на 4, так как $68=4*17$. Поэтому $k=3,7,11,15,\ldots$ При $k=3$ находим минимальное $x=52$, а тогда из уравнения находим $y=85$ Ответ: (137) .

7) Система не меняется при замене x на $-x$. А тогда в силу единственности $x=0;$ подставляя $x=0$ в систему, находим, что

$a^3 - 4a = 0 \Rightarrow a = 0, a = \pm 2$. Проверим эти значения a. Пусть $a = 0$, тогда $\begin{cases} x^2 - |x| y = 0 \\ |x| + |y|^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$ система не имеет решений, т.е. $a = 0$ не подходит.

Пусть $a = -2$. Тогда $\begin{cases} x^2 - |x| y = 0 \\ |x| + |y|^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow$ решений очевидно нет, $a = -2$ не подходит.

И наконец, если $a = 2$, то получим: $\begin{cases} x^2 - |x| y = 0 \\ |x| + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \end{cases}$ и тогда система имеет единственное решение.

Ответ: $\{2\}$.