Утверждаю:

Ректор РУТ

_______________ Лёвин Б.А.

Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Заочный тур 2018 год.

1. Один гамбургер, три сосиски и 2 сардельки весят вместе 240 гр, а два гамбургера, 4 сосиски и 5 сарделек весят 440 гр. Сколько грамм весят вместе один гамбургер, 4 сосиски и 1,5 сардельки?
2. Решить неравенство:
$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}}>0.$$
В ответе указать сумму первых трех натуральных последовательных x, являющихся решением неравенства.
3. Решить при $z>0$ уравнение:
$$\arcsin\left(x^2-x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2-x}+\arccos y+tg^2(\pi z+x-1)\right)+$$
$$+\sqrt{2x^2-x-1}=\sqrt{-x^2+x}+arctg(2-x).$$
В ответе указать наименьшее значение суммы $x+y+z$, где (x,y,z) – решения уравнения.
4. Найти значения выражения:
$$\frac{1*2+2*3+3*4+\cdots+2016*2017}{2^2+4^2+6^2+\cdots+2016^2}.$$
5. В треугольнике ABC со сторонами $AB=5, BC=\sqrt{17}, CA=4$ на стороне CA взята точка M так, что $CM=1$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.
6. В коробке лежат яблоки и груши. Из коробки на удачу вынимаются два яблока, вероятность этого события равна ½. Каково минимальное возможное число всех фруктов в коробке?
7. Найти все действительные корни уравнения: $\sqrt{6-\sqrt{x+2}}=x$.
8. Найти натуральные x,y, удовлетворяющие условию $113x-69y=11$, сумма которых принимает наименьшее значение. В ответе указать эту сумму.
9. При каких значениях a система $\begin{cases}x^2-|x|y=a^3-4a\\ |x|+y^2=a-2\end{cases}$ имеет единственное решение.

Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Заочный тур 2018 год.

1) Пусть x гр вес одного гамбургера, y – вес одной сосиски, и z – вес одной сардельки. Тогда имеем по условию задачи
$$\begin{cases} x+3y+2z=240 \\ 2x+4y+5z=440 \end{cases}$$

Будем искать такие числа $a\,u\,b$, чтобы $a(x+3y+2z)+b(2x+4y+5z)=x+4y+1{,}5z$. Приравнивая последовательно коэффициенты при x, y, z, получим систему $\begin{cases} a+2b=1 \\ 3a+4b=4 \\ 2a+5b=1{,}5. \end{cases}$ Решая ее, находим
$a=2, b=\frac{-1}{2}$. А тогда получим, что

$x+4y+1{,}5z=2*240-\frac{1}{2}*440=260$. Ответ: 260 гр.

2) Находим ОДЗ: $x>\frac{1}{5}; x\neq\frac{1}{2}; x\neq\frac{1}{3}.$ Будем решать данное неравенство методом интервалов, предварительно заменив каждый множитель на выражение того же знака. Так как $\log_a b \backsim (a-1)(b-1)$, то приходим к неравенству:
$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x}>0 \Longleftrightarrow \frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(3x-1)(5x-2)} \Rightarrow \Longrightarrow (с\ учетом\ ОДЗ)\ \frac{1}{5}<x$$

Отсюда первые три натуральные числа, являющиеся решением, будут: 1,2,3. А тогда ответ: $\{6\}$.

3) Находим ОДЗ: $\begin{cases} -x^2+x\geq 0 \\ 2x^2-x-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1$. Подставляя $x=1$ в равенство, получим:
$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+arccosy+tg^2\pi z\right)=arctg\,1=\frac{\pi}{4.}\Longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}+\arccos y+tg^2\pi z=¿$$

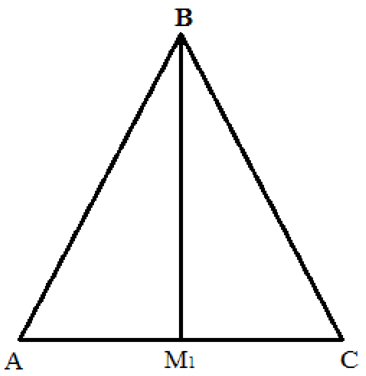
$¿\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\arccos y+tg^2\pi z=0\Rightarrow\arccos y=0; tg\pi z=0; \Rightarrow y=1; \pi z=\pi k,$ значит x=1, y=1, z=k. Но z>0, поэтому наименьшее z=1 и следовательно ответ: $\{3\}$.

4) Преобразуем выражение в числителе:

$1*2+2*3+3*4+\ldots+2016*2017=2(1+3)+4(3+5)+\ldots++2016*(2015+2017)=2(2^2+4^2+6^2+\ldots$

. Поэтому дробь равна 2. Ответ: (2) .

5) Проведем высоту BM_1 на сторону АС. Пусть $M_1C=x$. Тогда по т.Пифагора $AB^2-AM_1^2=BM_1^2; CB^2-CM_1^2=BM_1^2$.



Отсюда $25-(4-x)^2=17-x^2 \Rightarrow x=\text{¿}1,$ т.е точка M_1 совпадает с точкой M . Но тогда центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой его гипотенузы. А тогда расстояние между центрами окружностей равно средней линии треугольника ABC , параллельной стороне AC . А так как $AC=4$, то искомое расстояние равно 2. Ответ: (2) .

6) Пусть в коробке z яблок и k груш. Вероятность того, что первый фрукт будет яблоко равна $\frac{z}{z+k}$. Вероятность, что второй фрукт также яблоко, при условии, что первый фрукт яблоко, равна $\frac{z-1}{z+k-1}$. Тогда вероятность, что вынуть два яблока равна $\frac{z(z-1)}{(z+k)(z+k-1)}=\frac{1}{2}$. Далее заметим, что $\frac{z}{z+k}>\frac{z-1}{z+k-1}$ $(при\, k>0)$. Тогда имеем неравенство $\left(\frac{z}{z+k}\right)^2>\frac{1}{2}>\left(\frac{z-1}{z+k-1}\right)^2$, отсюда $(для\, z>1)$ получим $\frac{z}{z+k}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{z-1}{z+k-1}$ из левого неравенства имеем $z>(\sqrt{2}+1)k$, из второго неравенства находим, что $(\sqrt{2}+1)k>z-1$, так что $(\sqrt{2}+1)k+1>z>(\sqrt{2}+1)k \Rightarrow при\, k=1$ получим $2{,}414<z<3{,}414$ так что можно взять $z=3$. При этом $z;k$ возьмем 1. Тогда $P(два\, яблока)=\frac{\frac{3}{4}*2}{3}=\frac{1}{2}.$ Следовательно минимальное число фруктов есть 4. Ответ: (4) .

7) Обозначим $x+2=t\geq 0$, тогда

$\sqrt{6-\sqrt{t}}=t-2 \Longleftrightarrow 6-\sqrt{t}=t^2-4t+4 \Longleftrightarrow t^2-4t+\sqrt{t-2}=¿0; t(t-4)+\sqrt{t}-2=0; t(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)+\sqrt{t}$

следовательно $x=2$. Других решений нет т.к. второй множитель положителен. Ответ: $\{2\}$.

8) Запишем исходное уравнение в виде: $44x-11=69(y-x)$, или $11(4x-1)=69(y-x)$. Числа 11 и 69 взаимно простые. Поэтому число $4x-1$ кратно 69, а число $y-x$ кратно 11. Обозначим $4x-1=69k, y-x=11n$, где k, n натуральные числа. Первое соотношение запишем как $4x=68k+k+1 \Rightarrow k+1$ делится нацело на 4, так как $68=4*17$. Поэтому $k=3,7,11,15,\ldots$ При $k=3$ находим минимальное $x=52$, а тогда из уравнения находим $y=85$ Ответ: $\{137\}$.

9) Система не меняется при замене x на $-x$. А тогда в силу единственности $x=0;$ подставляя $x=0$ в систему, находим, что $a^3-4a=0 \Rightarrow a=0, a=\pm 2$. Проверим эти значения a . Пусть $a=0$, тогда $\begin{cases} x^2-|x|y=0 \\ |x|+|y|^2=-2 \end{cases} \Rightarrow$ система не имеет решений, т.е. $a=0$ не подходит.

Пусть $a=-2$. Тогда $\begin{cases} x^2-|x|y=0 \\ |x|+|y|^2=-4 \end{cases} \Rightarrow$ решений очевидно нет, $a=-2$ не подходит.

И наконец, если $a=2$, то получим: $\begin{cases} x^2-|x|y=0 \\ |x|+y^2=0 \Rightarrow x=y=0 \end{cases}$ и тогда система имеет единственное решение.

Ответ: $\{2\}$.