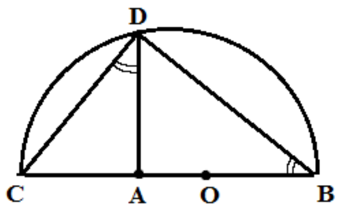
Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018год.

Вариант 1.

1) Пусть дан отрезок $AB$ длины 7. На продолжении отрезка $AB$ за точку $A$ отложим отрезок $AC=\frac{1}{7}AB$ (деление отрезка на $n$ равных частей относится к числу элементарных построений). На отрезке $CB$, как на диаметре, построим полуокружность (это также элементарное построение!) и из точки $A$ восставим перпендикуляр $AB$ до пересечения с этой окружностью в точке $D$ (см.рис.ниже).




Тогда $AD=\sqrt{CA*AB}=\sqrt{7}$ т.к. угол $D$ – прямой и в силу подобия (по равенству углов) треугольников $CAD\, u\, DAB$ имеем: $\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AD}$, т.е. $AD=\sqrt{7}$.

2) Данное равенство должно выполнятся для любого $x$, в том числе для $x_2=\frac{x}{2x-1}$. Отсюда находим, что $x=\frac{x_2}{2x_2-1}$. Поэтому получим $f\left(\frac{x_2}{2x_2-1}\right)+\frac{x_2}{2x_2-1}f(x_2)=2$. Переобозначая $x_2$ через переменную $x$, получим систему равенств:

$$\begin{cases} f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2 \\ f\left(\frac{x}{2x-1}\right)+\frac{x}{2x-1}f(x)=2 \end{cases}$$

Решая ее, находим, что $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}$. Проверка показывает, что эта функция есть решение данного уравнения. Ответ: $\frac{4x-2}{x-1}$.

3) Обозначим $2x-2y+3z-3=A, 4z-x-3y=B, 5y-x-7z+6=C$. Находим, что A+B+C = 3. По условию $x,y,z$ – целые числа, поэтому

$A\geq 1, B\geq 1, C\geq 1 \Longrightarrow A=1, B=1, C=1$ . А тогда получаем неравенство $y^2-4y<0 \Longleftrightarrow 0<y<4 \Rightarrow y=\{1,2,3\}$ .

Решим систему $A=1, B=1$ . Выразим неизвестные $x, z\,через\, y$ .

Получим $x=\frac{13-y}{11}; z=\frac{8y+6}{11}$ . Из этих равенств получим, что $x, z$ будут целыми лишь при $y=2, x=1, z=2$ . Таким образом, ответ: $(1;2;2)$ .

*4)* Данное неравенство равносильно неравенству $\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\leq 0 \Longleftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-3)}\leq 0$ . Решая его методом интервалов, находим с учетом ОДЗ: Ответ: $x<-1; 0\leq x<1; 2\leq x<3$ .

*5)* $(1-\cos^2\alpha)\cos^6\alpha=(1-y)y^3, где\, y=\cos^2\alpha$ . Найдем $max f(y)=y^3-y^4\, при\, 0\leq y\leq 1$ . Имеем $f' y=3y^2-4y^3$ . Тогда критическая точка $y=\frac{3}{4}$ . В этой точке $f(y)$ имеет максимум.

$fmax=\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3*1}{4}=\frac{27}{256}$ . Так как $maxf(y)=\frac{27}{256}$ , то для любой другой точки $f(y)<\frac{27}{256}$ , что и требовалось доказать.

6) Пусть $O_1, O_2, O_3, O_4$ – центры шаров, лежащие внутри правильного тетраэдра. Так как каждый шар касается трех других шаров, то центры этих шаров образуют правильный тетраэдр $O_1, O_2, O_3, O_4$ со стороной равной $2r$ , где $r$ – радиус искомых шаров. С другой стороны, каждый шар по условию также касается трех граней исходного тетраэдра, поэтому расстояние от любой грани тетраэдра $O_1, O_2, O_3, O_4$ до грани исходного тетраэдра равно $r$ , а сами грани параллельны граням исходного тетраэдра. Известно, что радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр со стороной $a$ , равен $R=\frac{a\sqrt{6}}{12}$ . А так как радиус шара, вписанного в данный тетраэдр на $r$ больше радиуса шара, вписанного во второй тетраэдр $O_1, O_2, O_3, O_4$ , с ребром $2r$ , то $\frac{a\sqrt{6}}{12}=\frac{2r\sqrt{6}}{12}+r \Longrightarrow r=\frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}=1$

Ответ: $\{1\}$ .

7) Преобразуем первую часть равенства.

$$1111111122222222=\frac{10^{16}-1}{9}+\frac{10^8-1}{9}=\frac{(10^8-1)(10^8+1)}{9}+\frac{10^8-1}{9}=\frac{10^8-1}{9}*(10^8+2)=\frac{\frac{10^8-1}{3}*10}{3}$$

. Покажем, что число $\frac{10^8-1}{3}$ есть корень данного уравнения.

Действительно, подставляя $x=\frac{10^8-1}{3}$ в уравнение, получим:

$$\left(\frac{10^8-1}{3}\right)^2+\frac{10^8-1}{3}=\frac{10^8-1}{3}*\left(\frac{10^8-1}{3}+1\right)=\frac{\frac{10^8-1}{3}*10^8+2}{3}$$

, т.е. равно правой части уравнения. А тогда второй корень будет равен: $\frac{-10^8+2}{3}$ .

Ответ: $\left\{\frac{10^8-1}{3};-\frac{(10^8+2)}{3}\right\}$.

8) Преобразуя уравнение, получим: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}+acos\left(x-\frac{1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0$ . В ОДЗ уравнение симметрично относительно замены $x$ на $\frac{1}{x}$ . Поэтому, если $x_0$ – решение, то $\frac{1}{x_0}$ - также решение. А тогда в силу единственности должно быть $\frac{1}{x}=x$ , т.е. $x=\pm 1$ . Найдем при $x=\pm 1$ соответствующие значения параметра $a$ и проверим достаточность. При $x=-1$ получаем $a^2+a-\frac{3}{4}=0, a=\frac{-3}{2}, a=\frac{1}{2}$ . Разберем эти два случая. При $a=\frac{-3}{2}$ имеем уравнение: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}\geq 2^{\frac{-2}{2}}=-1+\frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)$ .

Функция в уравнении слева ограничена снизу: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}\geq 2^{\frac{-2}{2}}=\frac{1}{2}$ ; функция справа ограничена сверху: $-1+\frac{3}{2}\left(cosx-\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{2}$ . Поэтому равенство возможно лишь при:

а) $\begin{cases} 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}=\frac{1}{2} \\ -1+\frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+x=-2 \\ \cos\left(x-\frac{1}{x}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow x=-1$ , значит $a=\frac{-3}{2}$ подходит.

б) при $a=\frac{1}{2}$ имеем $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}=1-\frac{1}{2}\left(cosx-\frac{1}{x}\right)$ . Покажем, что это уравнение кроме решения $x=-1$ имеет на интервале $(-1;0)$ еще решение.

Пусть $f(x)=2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}, r(x)=1-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{1}{x}\right)$ . На интервале $(-1,0)$ обе функции непрерывны, а функция $f(x)$ ограничена: $\frac{1}{2}<f(x)<1$ . Далее, так как при изменении $x$ от $-1$ до $0$ функция $R(x)=x-\frac{1}{x}$ монотонно возрастает от $0\,до+\infty$ , то в силу периодичности косинуса, функция $r(x)$ бесконечное число раз проходит от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$ и обратно. Следовательно, уравнение $f(x)=r(x)$ имеет бесконечное число решений на интервале $(-1;0)$ . Поэтому $a=\frac{1}{2}$ не подходит.

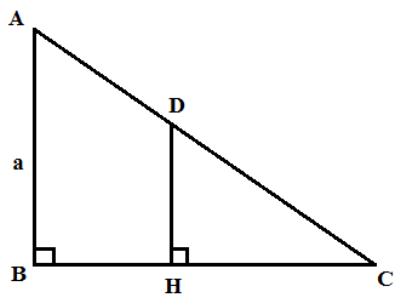
При $x=1$ получаем $2+a+a^2-\frac{5}{4}=0 \Longleftrightarrow a^2+a+\frac{3}{4}=0 \Longrightarrow D<0$ решений нет, т.е. $x=1$ не является решением ни при каком а.

Ответ: $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$ .

Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018год.

Вариант 2.

1) Строим прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $AB=a, BC=2a$, где $a$ – произвольный отрезок. Тогда гипотенуза этого треугольника по т.Пифагора равна: $AC=a\sqrt{5}$. На гипотенузе $AC$ отложим отрезок $CD$ равный $\sqrt{5}$, а из точки $D$ опустим перпендикуляр $DH$. Из подобия треугольников $DHC$ и $ABC$, получаем, что $\frac{CH}{BC}=\frac{DC}{AC}$. Отсюда $CH=2$.




2) Полагая, что $t=2x+3, x=\frac{t-3}{2}$, получим:

$$\begin{cases} f(t-1)+2\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2} \\ f(x-1)+\varphi(2x+1)=2x \end{cases}$$

Заменяя переменную во втором уравнении $x$ на $t$, имеем систему:

$$\begin{cases} f(t-1)+2\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2} \\ f(t-1)+\varphi(2t+1)=2t \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем $\varphi(2t+1)=\frac{t-5}{2}-2t=\frac{-3t-5}{2}$. Следовательно $f(t-1)=2t+\frac{3t+5}{2}=\frac{7t+5}{2}$.

Поэтому, если $2t+1=x$, то $t=\frac{x-1}{2}$ и тогда $\varphi(x)=\frac{-3x+3-10}{4}=\frac{-3x+7}{4}$. Аналогично, обозначая $t-1=x$, имеем $f(x)=\frac{7x+12}{2}$.

Ответ: $f(x)=\frac{7x+12}{2}, \varphi(x)=\frac{-3x+7}{4}$ .

*3)* Обозначим $a=2x+3y-2z-3, b=4x-y-4z+7, c=6z-2y-6x-1$ . По ОДЗ $a,b,c>0 \text{и} a,b,c$ целые числа. Так как $a+b+c=3$ , то $a=b=c=1$ . Следовательно $6z^2-47z+77<0$ . Решая это неравенство, находим, что $\frac{7}{3}<z<5{,}5$ . Так как $z$ – целое число, то $z=\{3,4,5\}$ . При $z=3$ находим, что $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=2$ . Значит $(2,2,3)$ есть решение.

При $z=4$ получим $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x-y=10 \end{cases} \Rightarrow x=3, y=2$ .

При $z=5$ получим $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 4x-y=14 \end{cases} \Rightarrow y=2, x=4$ , значит $(4,2,5)$ – решение.

Ответ: $(2,2,3),(4,2,5),(3,2.4)$ .

*4)* Неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x^2-2x-3)\left((3+2x)^2-(x-2)^2\right)}{(x^2-1)^2-3^2}>0 \Longleftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)(x+5)(3x+1)}{(x^2-4)(x^2+2)}>0 \Longleftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)(x+5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-1)(x+2)}>$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим ответ: $x<-5; -2<x<-1; -\frac{1}{3}<x<2; x>3$ .

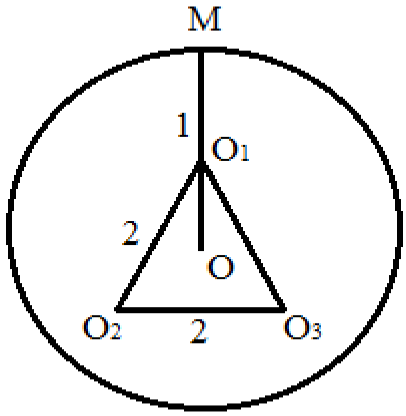
5) Имеем:

$$\frac{cosx}{\sin^2 x(cosx-sinx)}-8=\frac{\cos x-8\sin^2 x\cos x+8\sin^3 x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}=\frac{1}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}\left(\frac{\cos x(1-8\sin^2 x)}{\sin^3 x}+8\right)s$$

При $0<x<\frac{\pi}{4} \sin x>0, \cos x-\sin x>0$ , поэтому все три выражения $\cos x, \frac{1}{\sin^3 x}, 1-8\sin^2 x$ убывают, поэтому наименьшее значение $\frac{\cos x}{\sin^3 x}(1-8\sin^2 x)$ получится при $x=\frac{\pi}{4,}$ оно равно -6, следовательно, $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8$ , что и требовалось доказать.

6) Так как сферы касаются обоих оснований цилиндра, то высота цилиндра равна 2. Сделаем ортогональную проекцию сфер на нижнее основание цилиндра. Пусть $R$ – радиус основания цилиндра, O –

центр нижнего основания, $O_1, O_2, O_3$ – проекции центров сфер на нижнее основание цилиндра. Тогда проекция это окружность радиуса $R$, в которой лежат три равные окружности радиуса 1; каждая из этих окружностей касается двух других окружностей и внутренним образом касается окружности цилиндра (см. рисунок). Ясно, что треугольник $O_1O_2O_3$ правильный со стороной 2, точка О – центр этого треугольника. Тогда находим, что $O_1O=\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. А тогда $R=OM=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$.




Отсюда объем цилиндра равен $V=2\pi\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$. Ответ: $2\pi\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$.

7) Имеем:

$$1111122222=\frac{10^{10}-1}{9}+\frac{10^5-1}{9}=\frac{(10^5-1)(10^5+1)}{9}+\frac{10^5-1}{9}=\frac{10^5-1}{9}*(10^5+2)=\frac{\frac{10^5-1}{3}*10^5+2}{3}$$

. Поэтому получим: $x^2-x=\frac{\frac{10^5+2}{3}*10^5-1}{3}$.

Покажем, что корни этого уравнения будут числа $\frac{10^5+2}{3}$ и $\frac{1-10^5}{3}$.

Для этого подставим эти числа в исходное уравнение:

$$\left(\frac{10^5+2}{3}\right)^2-\frac{10^5+2}{3}=\left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5+2}{3}-1\right)=\left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5-1}{3}\right),$$

т.е. равно первой части.

Аналогично, подставляя число $\frac{1-10^5}{3}$ в исходное уравнение, получим:

$$\left(\frac{1-10^5}{3}\right)^2-\frac{1-10^5}{3}=\left(\frac{1-10^5}{3}\right)\left(\frac{1-10^5}{3}-1\right)=\left(\frac{1-10^5}{3}\right)\left(\frac{-10^5-2}{3}\right)=\left(\frac{10^5+2}{3}\right)\left(\frac{10^5-1}{3}\right),$$

ч.т.д.

Ответ: $\frac{10^5+2}{3}$ , $\frac{1-10^5}{3}$ .

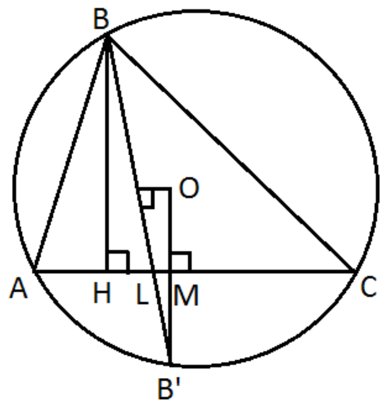
8) Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте: $\frac{D}{4}=a^2-4a-3\geq 0 \Longleftrightarrow -3\leq a\leq -1$ . По теореме Виета $S=x_1^2+x_2^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1x_2=4a^2-2\left(2a^2+4a+3\right)=-8a-6$ . При $-3\leq a\leq -1$ получаем, что $2\leq -8a-6\leq 18$ , следовательно наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a=-3$ .

Ответ: $a=-3$ , S=18.

Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018 год.

Вариант 3.

1) Рассмотри треугольник $ABC$ с данными высотой $BH$, биссектрисой $BL$ и медианой $BM$. Продолжим биссектрису $BL$ до пересечения с описанной окружностью в точке $B'$ (так как $\angle ABB' = \angle CBB'$, то $B'$ − середина дуги $AC$ ¿ . Теперь через точку $M$ проведем перпендикуляр к хорде $AC$. Тогда $B'$ (середина дуги) и точка $O$ (центр описанной окружности) принадлежат этому серединному перпендикуляру. Таким образом, чтобы построить $\triangle ABC$, сначала




надо построить треугольник $BHM$ (по гипотенузе $BM$ и катету $BH$), потом на отрезке $MH$ отметить точку $L$ (биссектриса всегда лежит между медианой и высотой) и найти точку $B'$ как точку пересечения перпендикуляра к прямой $HM$ в точке $M$ и прямой $BL$. Центр окружности $O$ есть точка пересечения прямой $MB'$ и серединного перпендикуляра к хорде $BB'$. Вершины $A$ и $C$ есть точки пересечения этой окружности с прямой $HM$.

2) Так как равенство должно выполняться при всех $x$, в том числе при $x_2 = \frac{1}{x}$. Тогда получаем $\left(\frac{1}{x} - 1\right) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{-x+1}$. Объединяя это равенство с первоначальным в систему и обозначая $f(x) = y; f\left(\frac{1}{x}\right) = z$,

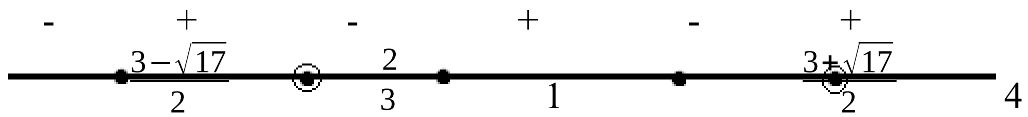
получим $\begin{cases} (x-1)y+z=\dfrac{1}{x-1} \\ \dfrac{1-x}{x}z+y=\dfrac{x}{1-x}. \end{cases}$ Решая эту систему, находим, что $y=\dfrac{1}{1-x}$.

Ответ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

3) Обозначим $x-y+3z-1=A, 2x+2y-2z-3=B, 7-3x-y-z=C$. По ОДЗ $A,B,C$ больше нуля, но $x,y,z$ – целые числа, следовательно $A,B,C$ – натуральные числа. Но заметим, что $A+B+C=3$, следовательно это возможно лишь при $A=B=C=1$. А тогда получим неравенство $x^2+x-6<0$. Решая его, находим, что $-3<x<2$. Так как $x$ - целое число, то отсюда получаем что $x\in\{-2,-1,0,1\}$. Рассмотрим систему $A=1, B=1$ как систему относительно $y u z$ при известном $x$. Решение этой системы $y=4-2x, z=2-x$ попеременно подставляя в эти равенства известное $x$, мы получим ответ: $\{(-2;8;4),(-1;6;3),(0;4;2),(1;2;1)\}$.

4) Данное неравенство равносильно неравенству:
$$\frac{(4^x-4^2)\left((x^2-3x)^2-2^2\right)}{(2x-3)^2-(x+1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2-3x-2)(x^2-3x+2)}{(2x-3-x-1)(2x-3+x+1)}\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(x-2)(x^2-3x-2}{(x-4)(3x-2)}$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим




Ответ: $\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{2}{3}\right)\cup\left[1;\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]\cup(4;+\infty)$.

5) Рассмотри функцию $f(x)=\dfrac{tgx}{x}\, 0<x<\dfrac{\pi}{4}$. Найдем ее производную:

$$f'(x)=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$$

Так как $x-\sin x\cos x=\frac{1}{2}(2x-\sin 2x)>0$, то при $0<x<\frac{\pi}{4}$ производная $\frac{tgx}{x}$ положительна, т.е. функция $f(x)$ возрастает на интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$. Отсюда получаем, что

$$\frac{tg\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}}<\frac{tg\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}};\frac{tg\frac{9\pi}{180}}{\frac{9\pi}{180}}<\frac{tg\frac{10\pi}{180}}{\frac{10\pi}{180}}\Longrightarrow\frac{tg5^o}{5}<\frac{tg6^o}{6}\,u\,\frac{tg9^o}{9}<\frac{tg10^o}{10}$$

А тогда $\frac{\frac{tg5^o}{5}*tg9^o}{9}<\frac{\frac{tg6^o}{6}*tg10^o}{10}\Leftrightarrow 4\,tg5^o\,tg9^o<3\,tg6^o\,tg10^o$ .

Ответ: первое число слева меньше второго (справа).

6) Как известно, для правильного тетраэдра с ребром $a$ радиус сферы $r$ описанный вокруг данного тетраэдра, находится по формуле $r=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Применим эту формулу для вычисления радиуса $R$ сферы $S$. Пусть $O_1,O_2,O_3,O_4$ – центры сфер радиуса 1. Тогда тетраэдр с вершинами в точках $O_1,O_2,O_3,O_4$ будет правильным со стороной 2. А тогда радиус сферы, описанной вокруг этого тетраэдра равен $\frac{2\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Из симметрии ясно, что центр сферы $S$ - точка О, будет центром сферы, описанной вокруг тетраэдра $O_1,O_2,O_3,O_4$. А тогда $R$ – радиус этой сферы будет на 1 больше, чем $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ответ: $\left\{1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ .

*7)* Преобразуем правую часть равенства, записав как:

$$\frac{10^{20}-1}{9}+\frac{10^{10}-1}{9}=\frac{(10^{10}-1)(10^{10}+1)}{9}+\frac{10^{10}-1}{9}=\frac{10^{10}-1}{9}(10^{10}+2)=\frac{\frac{10^{10}-1}{3}*10^{10}+2}{3}.$$

Покажем, что число $\frac{10^{10}-1}{3}$ является корнем данного квадратного уравнения. Подставляя это число в левую часть уравнения, получаем, что

$$\left(\frac{10^{10}-1}{3}\right)^2+\frac{10^{10}-1}{3}=\frac{10^{10}-1}{3}\left(\frac{10^{10}-1}{3}+1\right)=\frac{\frac{10^{10}-1}{3}*10^{10}+2}{3},$$

что равно правой части. По теореме Виета находим второй корень, он равен: $\frac{-10^{10}+2}{3}$. Ответ: $\left\{\frac{10^{10}-1}{3};-\frac{10^{10}+2}{3}\right\}$.

8) Условия касания графиков данных функций в точке с абсциссой $x_0$ будут: значения функций, и производных в точке касания $x_0$ равны. Следовательно имеем для нахождения $a$ и точки $x_0$ систему:

$\begin{cases} a^{x_0}=x_0 \\ a^{x_0}\ln a=1. \end{cases}$ Тогда из второго уравнения имеем $a^{x_0}=\frac{1}{\ln a}$. Подставив это выражение в первое уравнение получим $x_0=\frac{1}{\ln a}$ и, следовательно, из второго уравнения получим уравнение $a^{\frac{1}{\ln a}}*\ln a=1$. Логарифмируем это уравнение, получим

$$\frac{1}{\ln a}\ln a+\ln\ln a=0\Rightarrow\ln(\ln a)=-1;\ \ln a=\frac{1}{e};\ a=e^{\frac{1}{e}}.$$

Проверка показывает, что это значение $a=e^{\frac{1}{e}}$ является искомым. Ответ: $e^{\frac{1}{e}}$.

Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018 год.

Вариант 4.

1) Проведем произвольную прямую $y=k-b$, пересекающую параболу в точках $A\,u\,B$. Тогда абсциссы концов хорды $A\,u\,B$ должны удовлетворять условиям: $kx-b=x^2$, т.е. $x^2-kx+b=0, x_A=\frac{k-\sqrt{k^2-4b}}{2}, x_B=\frac{k+\sqrt{k^2-4b}}{2}$. Тогда абсцисса $x_C$ середины отрезка $AB$ равна $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{K}{2}$ и зависит только от углового коэффициента $k$, но не от $b$. Поэтому, если две хорды $A_1B_1\,u\,A_2B_2$ параллельны, то их середины $C_1\,u\,C_2$ имеют одинаковые абсциссы и прямая $C_1C_2$ параллельна оси $OY$. Перпендикулярная этой прямой хорда $A_0B_0$ параллельна оси $OX$ и в силу симметрии ее середина лежит на оси $OY$. Поэтому прямая через т. $C_0$ параллельно $C_1C_2$ – это ось $OY$. Она пересекает параболу в вершине $O$, и прямая, проходящая через т. $O$ перпендикулярно $OY$ – это будет $OX$.

2) Обозначим $t=\frac{1}{x}; x=\frac{1}{t}$. Тогда получим равенство: $f\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{5}{t}f(t)=\frac{3}{t^3}$. Так как это равенство верно для любого $t\neq 0$, то оно верно для $t=x$. Отсюда имеем: $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{x}f(x)=\frac{3}{x^3}$. Тогда получим систему равенств

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{x}f(x)=\frac{3}{x^3} \\ f(x)+5xf\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5xf\left(\frac{1}{x}\right)+25f(x)=\frac{15}{x^2} \\ 5xf\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=3x^3 \end{cases}$$

вычитая из первого уравнения второе, получаем $24f(x)=\frac{15}{x^2}-3x^3 \Rightarrow f(x)=\frac{5}{8x^2}-\frac{x^3}{8}$.

Ответ: $f(x)=\frac{5}{8x^2}-\frac{x^3}{8}$.

3) Обозначим $2x+y-3z-3=m, x-2y-4z-1=n, y+7z-3x+7=k$

Тогда находим что $m+n+k=3$. Так как по условию $x,y,z$ –целые числа, то $m,n,k$ также целые числа к тому же $m,n,k>0$. Поэтому получаем, что

$m=n=k=1$ и тогда имеем неравенство: $0>z^2-9z+18$. Решая его, находим, что $3<z<6$ поэтому $z=\{4;5\}$. Рассмотрим систему равенств $m=1, n=1$ как систему относительно $x, y$ при известном z: $\begin{cases} 2x+y=4+3z \\ x-2y=2+4z \end{cases} \Longleftrightarrow$ решением этом системы будет: $x=2z+2, y=-z$, что при $z=4, \text{либо}\, z=5$ дает тройки решений: $(10;-4;4)\, и\, (12;-5;5)$.

Ответ: $\{(10;-4;4),(12;-5;5)\}$.

4) Исходное неравенство будет равносильно неравенству:

$$\frac{(x-2)\left((x^2-2x)^2-9\right)}{(x-3)^2-(x+1)^2}\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)}{(x-3-x-1)(x-3+x+1)}\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{-4*2(x-1)}\geq 0$$

$$\Longleftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)\leq 0 \Longleftrightarrow$$

методом интервалов находим, что $x\in[-1;1)\cup[2;3]$. Ответ: $[-1;1)\cup[2;3]$.

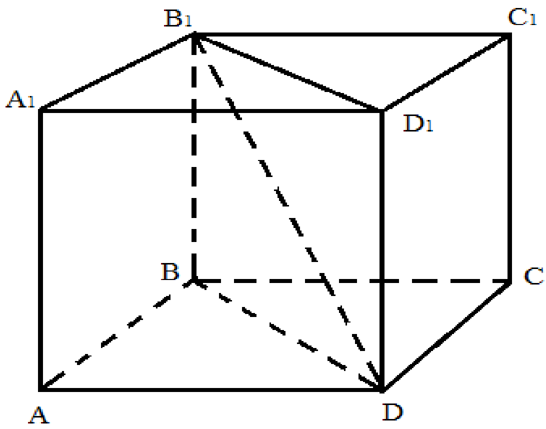
5) Перемножив левую часть, получим:

$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}+1$$

Докажем, что это выражение больше 5. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то дробь положительна. Обозначим $\sin\alpha+\cos\alpha=t$. Тогда $1+2\sin\alpha\cos\alpha=t^2$, отсюда $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$. Значит левая часть без 1 будет равна: $\frac{(t+1)2}{t^2-1}=\frac{2}{t-1}$. Нужно доказать, что $\frac{1}{t-1}>2 \Longleftrightarrow t<\frac{3}{2}$ но $t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\right)\leq\sqrt{2}\approx 1{,}41$, т.е. $t<1{,}5$ ч.т.д.

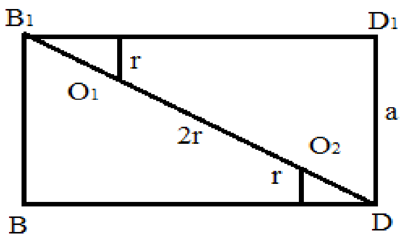
6)

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб со стороной $a$. Так как любая точка диагонали $B_1D$ равноудалена от трех граней, имеющих общую вершину, то центры шаров $O_1, O_2$ лежат на этой диагонали.




Находим, что $B_1D = a\sqrt{3}$. Очевидно, что точка касания шара с гранью $A_1B_1C_1D_1$ лежит на $B_1D_1$, а с гранью $ABCD$ на $BD$. Обозначим радиус искомого шара через $r$. Тогда (см. рисунок)

$\frac{D_1D}{B_1D} = \sin\angle DB_1D_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. С другой стороны, имеем $\frac{r}{B_1O_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B_1O_1 = r\sqrt{3}$.




А тогда

$$2r\sqrt{3} + 2r = B_1D = a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} = \frac{a}{4}\left(3-\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\frac{a}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

7) Правая часть уравнения будет равна:

$$\frac{10^{12}-1}{9} + \frac{10^{16}-1}{9} = \frac{\left(10^6-1\right)\left(10^6+1\right)}{9} + \frac{10^6-1}{9} = \frac{10^6-1}{9}\left(10^6+2\right) = \frac{\frac{10^6+2}{3} * 10^6 - 1}{3}.$$

Покажем, что число $\frac{10^6-1}{3}$ есть корень этого уравнения. Подставляя в уравнение, получаем: $\left(\frac{10^6-1}{3}\right)^2 + \frac{10^6-1}{3} = \left(\frac{10^6-1}{3}\right)\left(\frac{10^6+2}{3}\right)$ что и требовалось доказать. Второй корень находим по т.Виета. Он равен $-\left(\frac{10^6+2}{3}\right)$.

Ответ: $\left\{\frac{10^6-1}{3};-\left(\frac{10^6+2}{3}\right)\right\}$ .

8) Если $(x_0;y_0)$ какое то решение системы, то $(-x_0;y_0)$ также решение. А тогда $x_0=0$ . Подставим $x=0$ в систему и найдем необходимые условия на $a$: $\begin{cases} a=y+1 \\ 1+|y|=2 \end{cases} \Longleftrightarrow a=0; a=+2$ . Проверим достаточность. При $a=0$ получаем $y+\cos x=0, 2^{|\sin x|}+|y|=2$ . Помимо решения $x=0, y=-1$ , эта система имеет еще решение $x=\frac{\pi}{2}, y=0,$ т.е. $a=0$ не подходит.

При $a=2$ получим: $\begin{cases} 2+2|x|=y+\cos x \\ 2^{|\sin x|}=2-|y| \end{cases} x=0, y=1$ будет решением этой системы. Покажем, что других решений нет.

*a)* $y\geq 0$ тогда $\begin{cases} 2+2|x|=y+\cos x \\ 2^{|\sin x|}=2-y \Longrightarrow \textit{так как } 1\leq 2^{|\sin x|}\leq 2, \textit{то } 0\leq y\leq 1. \end{cases}$

Поэтому из первого уравнения имеем что $\begin{cases} y+\cos x\leq 2 \\ 2+2|x|\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}$

b) $y\leq 0 \, \textit{тогда} \begin{cases} 2+2|x|=y+\cos x \\ 2^{|\sin x|}=2+y. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим: $2+|2x|-2^{|\sin x|}=\cos x-2$ . Отсюда: $\cos x-2<0, a\, 2+2|x|-2^{|\sin x|}>0$ , т.е. равенство невозможно.

Ответ: $a=2$ .

**Критерии определения дипломантов олимпиады**

**По результатам проверки каждого задания олимпиады школьников «Паруса Надежды» по математике выставлялась одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):**

**«+»** задача решена полностью;

**«+/-»** задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения (например, допущена арифметическая ошибка в конце правильного решения);

**«-/+»** задача не решена, но имеются содержательные продвижения (например, задача решена для содержательного частного случая);

**«-»** задача не решена;

**«0»** к решению задачи участник не приступал.

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач, то есть задач, за которые поставлена оценка «+» или «+/-».

Решением оргкомитета олимпиады в 2017-2018 уч.г. были установлены следующие критерии определения победителей и призеров олимпиады «Паруса надежды» по математике