II Тур олимпиады «Паруса надежды». 2015г.

Вариант 1.

Решение.

1) ОДЗ $a - x \geq 0$, т.е $x \leq a$. Если $a \leq 0$, то в области ОДЗ левая часть будет неотрицательная, следовательно любое x из ОДЗ будет корнем этого неравенства. Путь $a > 0$, тогда обе части неравенства положительны и при возведении в квадрат мы получим равносильное неравенство: $a - x \geq a^2$ отсюда $x \leq a - a^2$, а тогда число $a - a^2$ меньше чем a, следовательно решение будет $x \leq a - a^2$.

Ответ: при $a \leq 0$ $x \in (-\infty; a]$; при $a \geq 0$ $x \in (-\infty; a - a^2]$.

2) $1030237 = 101^3 - 4^3 = (101 - 4)(101^2 + 4 * 101 + 16) = 97(10201 + 404 + 16) = 97 * 10621.$

Так как последняя цифра числа 10621 есть единица, то если 10621 делится на простое число, то это число должно заканчиваться либо на 1, либо на 3, либо на 9. Непосредственно проверяя, что на 11 10621 не делится, проверим возможность деления на 13 и 19. При этом находим, что 10621 делится и на 13 и на 19. Значит 10621=13*19*43. Так как число 43 простое, то ответ: 1030237=97*13*19*43.

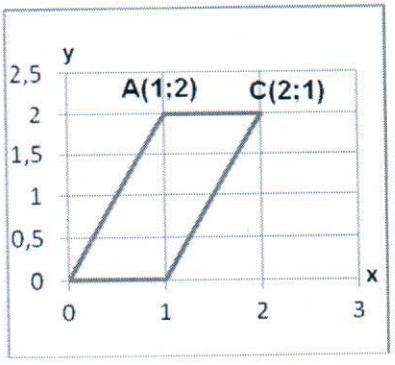
3) Заметим, что переменные x и y входят в выражение под знаком модуля. Это означает, что область симметрична как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. Поэтому достаточно построить область в I четверти при $x \geq 0, y \geq 0$, а затем полученный результат умножить на 4. Таким образом, в первой четверти имеем неравенство $|y - x| + |x - 1| \leq 1$.

Рассмотрим два случая: $0 \leq x \leq 1$ и $x \geq 1$.

При $0 \leq x \leq 1$ имеем: $|y - x| \leq x \Leftrightarrow (y - x)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow y(y - 2x) \leq 0$. Эта область представляет собой прямоугольный треугольник OAB, где A(1;2), B(1;0).

В области $x \geq 1$ имеем: $|y - x| \leq 2 - x \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$, кроме того, $(y - x)^2 \leq (2 - x)^2 \Leftrightarrow (y - 2)(y - 2x + 2) \leq 0$. С учетом указанных неравенств, получим треугольник ABC, где точка C(2;2). Значит область в I четверти есть параллелограмм OACB площади 2.

Поэтому ответ: $\{8\}$.



4) Пусть $x_0 \neq 0$ корень данного уравнения. Покажем, что число $\frac{1}{x_0}$ также корень данного уравнения. Действительно, заменяя x на $\frac{1}{x}$, получим:

$$17 * \left(\frac{1}{x^4} - 1\right) \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 30\left(\frac{1}{x^4} + 1\right) \Leftrightarrow 17(1 - x^4)(-\log_2 x^2) = 30(1 + x^4) \Leftrightarrow 17(x^4 - 1)\log_2 x^2 = 30(x^4 + 1).$$

Следовательно произведение всех корней данного уравнения, если такие есть, равно единице. Найдем хотя бы один действительный корень. Непосредственно проверяем, что число 2 будет корнем данного уравнения.

Ответ: $\{1\}$

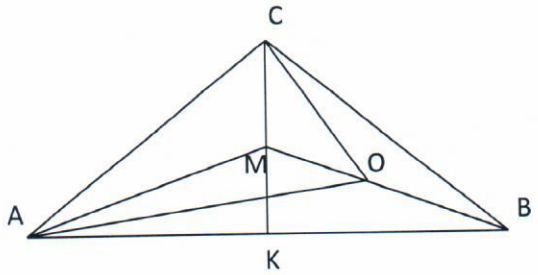
5) Ясно, что $x \geq 0, y \geq 0$. Если $x = 0, y = 0$, то левая часть равна правой, т.е это будет решение уравнения. Пусть теперь $x, y \geq 1$, тогда обозначим $x = a^2, y = b^2$, получим : $a + b = ab$. Отсюда $b = \frac{a}{a-1} = \frac{a-1+1}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1}$. Так как a и b целые числа, то $a - 1 = 1$, значит $a = 2$, отсюда $b = 2$. Поэтому $x = 4, y = 4$.

Ответ: $(0; 0) \cup (4; 4)$

6) Пусть ABC данный треугольник, где $AC = BC$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle OBA = 30^\circ$, $\angle OAB = 10^\circ$. Проведем высоту CK в треугольнике и пусть она пересекается с прямой BO в точке M. Так как CK – биссектриса, высота и медиана, то $AM = MB$ и $\angle MAO = 20^\circ$ и значит $\angle CAM = 20^\circ$, $\angle AOM = 40^\circ$, отсюда следует, что $\Delta ACM = \Delta AMO$ по стороне и принадлежащей к этой стороне углам.

Поэтому AO=AC и $\angle AOC = \angle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$.

Ответ: $\{70^\circ\}$



7) Рассмотрим вектор $\overline{a}(6,2,3)$ и вектор $\overline{b}(\sin x \cos y; \sin x \sin y; \cos x)$, тогда $f(x,y) = \overline{a} * \overline{b}$. Длина вектора $|\overline{a}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$, длина вектора $|\overline{b}| = \sqrt{\sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x} = 1$.

Так как для скалярного произведения двух векторов всегда $-|\overline{a}||\overline{b}| \leq \overline{a}\overline{b} \leq |\overline{a}||\overline{b}|$, то для нашего случая $-7 \leq f(x,y) = |\overline{a}||\overline{b}| \leq 7$.

Ответ: $\min f(x,y) = -7, \max f(x,y) = 7$.

8) Обозначим через C интересующее нас событие «В итоге у А «орлов» больше, чем у В», а через H_1, H_2, H_3 следующую полную систему событий:

H_1= «после первых n бросков у А орлов меньше, чем у В»

H_2= «после первых n бросков у А и у В орлов поровну»

H_3= «после первых n бросков у А орлов больше, чем у В»

В силу симметрии $P(H_1) = P(H_3)$, а сумма $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$, тогда получим, что $P(H_1) = P(H_3) = \frac{1-P(H_2)}{2}$. По формуле полной вероятности

$P(C) = P(H_1)P(C/H_1) + P(H_2)P(C/H_2) + P(H_3)P(C/H_3)$.

Так как очевидно, что $P(C/H_1) = 0$, (так как при n+1 броске А может лишь сравнять счет), $P(C/H_2) = \frac{1}{2}$ и $P(C/H_3) = 1$, то отсюда находим, что

$$P(C) = \frac{1 - P(H_2)}{2} * 0 + P(H_2) * \frac{1}{2} + \frac{1 - P(H_2)}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: Вероятность, что в итоге у игрока А выпадет больше «орлов», чем у игрока В, равна $\frac{1}{2}$.

II Тур олимпиады «Паруса надежды». 2015г.

Вариант 2.

Решение.

1) ОДЗ $x + 2a \geq 0$. Если $a \leq 0$, то для выполнения неравенства достаточно, чтобы выполнялось ОДЗ. Если же $a \geq 0$, то возводя обе части неравенства в квадрат, получим $2a + x \geq a^2$, $x \geq a^2 - 2a$. Так как $a^2 - a \geq -2a$, то решение будет $x \geq a^2 - 2a$.

   Ответ: при $a < 0$ $x \in [-2a; \infty)$, при $a \geq 0$ $x \in [a^2 - 2a; +\infty)$.

2) $1000027 = 1000000 + 27 = 100^3 + 3^3 = (100 + 3)(100^2 + 9 - 3 * 100) = 103 * 9709$

   Так как число 103 простое, то нужно разложить на простые множители число 9709. Так как последняя цифра этого числа 9, то возможные множители должны заканчиваться либо на 3 либо на 9, либо на 7. Деля 9709 на 7, получим $9709 = 7 * 1387$. Далее разложим 1387 на множители. Возможный множитель числа 1387 должен заканчиваться либо на 3, либо на 9. Деля на 19 получим: $1387 = 73 * 19$. Так как число 73 – простое, то окончательно получаем ответ: $1000027 = 7 * 19 * 73 * 103$.

3) Так как область заданная неравенством, симметрична относительно оси Ох и Оу, то достаточно нарисовать область в I четверти и вычислить ее площадь. А затем умножить полученный результат на 4. Пусть $x, y \geq 0$. Тогда получим $|2y - x| + |x - 1| \leq 1$.

   Рассмотрим два случая: $0 \leq x \leq 1$ и $x \geq 1$. При $0 \leq x \leq 1$ имеем:

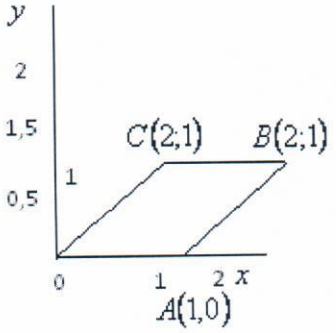
   $|2y - x| \leq x \Leftrightarrow (2y - x)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow (2y - 2x) * 2y \leq 0 \Leftrightarrow (y - x)y \leq 0.$

   При $x \geq 1$ получим $|2y - x| \leq 2 - x \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$. Тогда

   $(2y - x)^2 \leq (2 - x)^2 \Rightarrow (y - 1)(y - x + 1) \leq 0$. С учетом полученных неравенств на плоскости XOY в I четверти строим область, которая представляет собой фигуру OABC, которая является параллелограммом, вершины которого имеют координаты: O(0;0), A(1;0),B(2;1),C(1;1).

   Тогда площадь этого параллелограмма равна 1, а вся площадь фигуры равна 4.

   Ответ: $\{4\}$



4) Непосредственно замечаем, что число $x = 3$ является одним из возможных корней данного уравнения, т.е. уравнение имеет действительные корни. Пусть x_0 корень, покажем, что число $\frac{1}{x_0}$ также корень. Действительно:

   $14(\frac{1}{(x_0)^3} - 1)\log_3(\frac{1}{x_0}) = 13(\frac{1}{(x_0)^3} + 1)$, отсюда

   $14\left(\frac{1-(x_0)^3}{(x_0)^3}\right) * (-\log_3 x_0) = 13(\frac{1+(x_0)^3}{(x_0)^3})$. А тогда

$14((x_0)^3-1)\log_3 x_0 = 13(1+(x_0)^3)$. Таким образом, произведение корней данного уравнения равно 1.

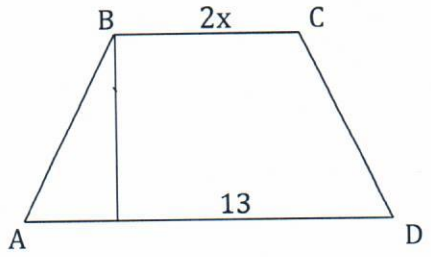
Ответ: $\{1\}$

5) Преобразуя исходное уравнение, получим: $(x-2y)(x^2+4y^2+2xy) = xy+16$, $(x-2y)((x-2y)^2+6xy) = xy+16$. Тогда, обозначая $x-2y=m>0$ и $xy=n$, получаем: $m^3+n(6m-1)=16$. Так как m и n также натуральные числа, то очевидно, что $1 \le m \le 2$. При $m=1$ имеем: $1+5n=16$, $n=3$; при $m=2$ имеем $8+11n=16 \Rightarrow n$ – не целое число. Следовательно $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy=3 \end{cases}$. Решая эту систему находим y=1, x=3. Проверка показывает, что эти числа есть решение исходного уравнения, а других решений нет.

Ответ: $x=3, y=1$.

6) Пусть ABCD данная трапеция с периметром 28, площадью 27, а наибольшая сторона равна 13. Покажем, что боковая сторона не может быть наибольшей. Действительно, если бы это было так, то средняя линия трапеции равнялась бы 1. Но высота трапеции $h \le 13$, что противоречит условию, что площадь равна 27. Таким образом, $AD=13$. Пусть $BC=2x$, тогда $BC+AD=2x+13$, $\frac{1}{2}(BC+AD)=x+6{,}5$. Находим AB: $AB=\frac{28-13-2x}{2}=7{,}5-x$. Тогда по теореме Пифагора $h=\sqrt{(7{,}5-x)^2-(6{,}5-x)^2}=\sqrt{14-2x}$. По условию: $S=\sqrt{14-2x}*(x+6{,}5)$. Пусть $x+6{,}5=y$, тогда $S=\sqrt{27-2y}*y=27 \Rightarrow 2y^3-27y^2+729=0$. Методом подбора найдем, что y =9 будет корнем этого уравнения. А тогда получим: $(y-9)(2y^2-9y-81)=0$. Находим корни квадратного относительно y уравнения. Получим $y=9, y=\frac{-9}{2}$. А тогда отсюда находим стороны трапеции: 13, 5, 5, 5.

Ответ: 13, 5, 5, 5.



7) Рассмотрим векторы $\vec{a}(5,-5,-\sqrt{14})$ и $\vec{b}\left(\sin 2x\cos\frac{y}{2}, \sin 2x\sin\left(\frac{y}{2}\right), \cos 2x\right)$. Длина вектора $\vec{a}=\sqrt{25+25+14}=8$. Длина вектора $\vec{b}$ легко находится и равна 1. Тогда $f(x,y)=\vec{a}*\vec{b}$, где $\vec{a}*\vec{b}$ - скалярное произведение вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из неравенства $-|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}*\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$, следует, что $-8 \le f(x,y) \le 8$.

Отсюда ответ: $min\, f(x,y)=-8$, $max\, f(x,y)=8$.

8) Обозначим искомое среднее число необходимых бросков через X. Если при первом броске выпадет шестерка, то окажется достаточным одного броска, а если нет, то потребуется еще в среднем X бросков и общее число бросков в среднем составит 1+x. Поэтому в шестой части случаев потребуется один бросок, а в пяти шестых случается в среднем 1+X бросков. Значит общее среднее число бросков равно: $X=\frac{1}{6}*1+\frac{5}{6}(1+X) \Rightarrow X=6$. Ответ: $\{6\}$

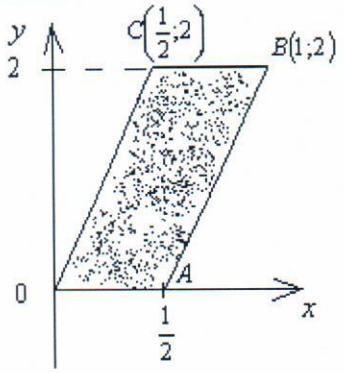
Олимпиада по математике Паруса надежды 2015 г.
II тур. Решение.
Вариант 3

1. ОДЗ $2a - x \ge 0 \Rightarrow x \le 2a$. Если $a > 0$, то решений нет; если $a < 0$, возводим в квадрат, получим $2a - x \le a^2$, $x \ge 2a - a^2$, но с учётом ОДЗ получаем $2a - a^2 \le x \le 2a$. Ответ: при $a > 0$ решений нет; при $a \le 0$ $x \in \left[2a - a^2; 2a\right]$

2. $999973 = 1000000 - 27 = 100^3 - 3^3 = (100-3)(10000+300+9) = 97 \cdot 10309 = 97 \cdot 13 \cdot 793 =$
$= 97 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 61$, но число 61 – простое, значит ответ: $999973 = 97 \cdot 13^2 \cdot 61$

3. Поскольку переменные x и y входят только в виде абсолютных величин, то искомая область симметрична относительно координатных осей, значит достаточно вычислить площадь этой области в I четверти и полученный результат умножить на четыре. Пусть $x,\ y \ge 0$. Тогда $|y - 2x| + |2x - 1| \le 1$

Рассмотрим два случая. Первый, когда $0 \le x \le \frac{1}{2}$, второй, когда $x \ge \frac{1}{2}$. Для первого случая получим: $|y - 2x| - 2x + 1 \le 1 \Rightarrow |y - 2x| \le 2x \Leftrightarrow (y - 2x)^2 \le 4x^2 \Leftrightarrow$ $(y - 2x)^2 - (2x)^2 \le 0 \Leftrightarrow y(y - 4x) \le 0$. Для второго случая: $|y - 2x| + 2x - 1 \le 1 \Rightarrow$ $|y - 2x| \le 2 - 2x \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1$. Тогда $(y - 2x)^2 \le (2 - 2x)^2 \Leftrightarrow (y - 2)(y - 4x + 2) \le 0$. С учётом полученных неравенств, строим в I четверти область, которая представляет собой параллелограмм $OABC$, где т. O, A, B, C имеют координаты $O(0;0)$, $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, $B(1;2)$, $C\left(1/2;2\right)$. Отсюда находим, что площадь фигуры равна: $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. А значит ответ: $\{4\}$.



4. Непосредственно заметим, что число 10 есть корень данного уравнения, т.е по крайней мере, это уравнение имеет действительные корни. Пусть x_0 - какой-то положительный корень этого уравнения. Покажем, что число $\frac{1}{x_0}$, также корень. Получаем:

$$101\left(\frac{1}{x_0^2} - 1\right)\lg\left(\frac{1}{x_0}\right) = 99\left(\frac{1}{x_0^2} + 1\right) \Leftrightarrow 101\left(1 - x_0^2\right)\left(-\lg x_0\right) = 99\left(1 + x_0^2\right) \Leftrightarrow 101\left(x_0^2 - 1\right)\lg x_0 = 99\left(1 + x_0^2\right.$$

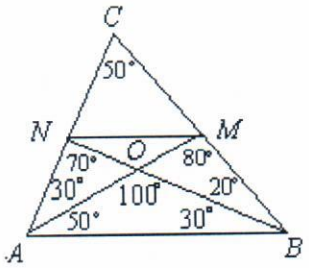
$$101\left(\frac{1}{x_0^2}-1\right)\lg\left(\frac{1}{x_0}\right)=99\left(\frac{1}{x_0^2}+1\right)\Leftrightarrow 101\left(1-x_0^2\right)\left(-\lg x_0\right)=99\left(1+x_0^2\right)\Leftrightarrow 101\left(x_0^2-1\right)\lg x_0=99\left(1+x_0^2\right),$$

т.е. действительно $\frac{1}{x_0}$ есть также корень. Поэтому произведение всех корней равно 1.

Ответ: $\{1\}$.

5. Очевидно, что $x=y=0$ корни этого уравнения. Пусть теперь $x,y>0$ натуральные числа больше или равные 1. Запишем уравнение в виде: $\left(\sqrt{2x}-1\right)\left(\sqrt{2y}-1\right)=1$. Пусть для определенности $y\ge x$, тогда $\sqrt{2x}-1\le 1$, т.е $2x\le 4, x\le 2\Rightarrow x=1, x=2$. При $x=1$ получим : $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2y}-1\right)=1\Rightarrow y=3+\sqrt{2}$ - число нецелое. При $x=2$ получаем $y=2$, значит $x=y=2$ единственное решение, которое строго больше нуля.
Ответ : $x=y=0,\ x=y=2$.

6.



Пусть ABC данный треугольник $\angle C=\angle B=50^\circ$, $\angle MAB=50^\circ$, $\angle ABN=30^\circ$. Найти $\angle BNM$.

Решение.

Пусть т. O – пересечение прямых AM и BN, тогда $\angle AOB=100^\circ$, $\angle BMA=80^\circ$, $\angle CBN=20^\circ$, $\angle ANB=70^\circ$, $\angle CAM=30^\circ$.

По теореме синусов имеем $\frac{OM}{OB}=\frac{Sin20^\circ}{Sin80^\circ}$; $\frac{OB}{OA}=\frac{Sin50^\circ}{Sin30^\circ}$; $\frac{OA}{ON}=\frac{Sin70^\circ}{Sin30^\circ}$. Отсюда получаем :

$$\frac{OM}{ON}=\frac{OM}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{ON}=\frac{Sin20^\circ\,Sin50^\circ\,Sin70^\circ}{Sin80^\circ\,Sin^2 30^\circ}=\frac{4Sin20^\circ\,Sin50^\circ\,Sin70^\circ}{Sin80^\circ}=\frac{2Sin40^\circ\,Cos40^\circ}{Sin80^\circ}=$$

$=\frac{Sin80^\circ}{Sin80^\circ}=1$. Следовательно $OM=ON$. А тогда $30^\circ+70^\circ+2\angle BNM=180$. Отсюда $\angle BNM=40^\circ$. Ответ : $\{40^\circ\}$.

7. Пусть $\bar{a}$ вектор с координатами $\bar{a}\left(3,-4,-\sqrt{11}\right)$, $\bar{b}$ вектор с координатами $\bar{b}\left(Sin2xCosy, Cos2xCosy, Siny\right)$. Длина $\left|\bar{a}\right|$ равна 6, длина вектора $\bar{b}$ очевидно равна 1. Так как $f(x,y)=\bar{a}\cdot\bar{b}$, где $\bar{a}\cdot\bar{b}$ - скалярное произведение векторов, то по свойствам скалярного произведения $-\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\le\bar{a}\cdot\bar{b}\le\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|$. Поэтому $-6\le f(x,y)\le 6$. Равенство будет достигаться если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, т.е. $\frac{Sin2xCosy}{3}=\frac{Cos2xCosy}{-4}=\frac{Siny}{-\sqrt{11}}$, что будет выполняться при соответствующих x и y.
Таким образом, $\min f(x,y)=-6$, $\max f(x,y)=6$.
Ответ: $\min f(x,y)=-6$, $\max f(x,y)=6$.

8. Искомая вероятность будет равна нулю, так как число всевозможных вариантов распределения муки по трём мешкам бесконечно, а благоприятным событием будет лишь один вариант. Ответ : $\{0\}$.

II Тур олимпиады «Паруса надежды». 2015г.

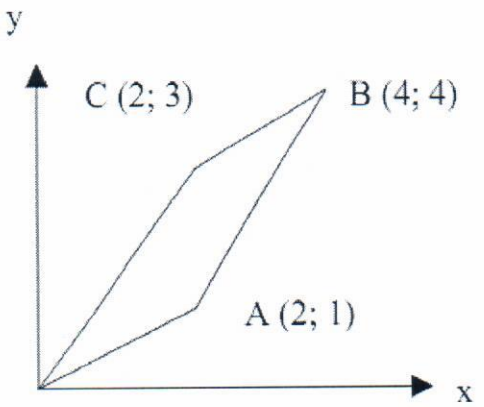
Вариант 4

Решение.

1) ОДЗ $a-2x\ge 0$, $x\le \frac{a}{2}$. Пусть $a<1$, тогда правая часть отрицательна и неравенство не имеет решений. Пусть $a\ge 1$, тогда возводим обе части в квадрат, получим $a-2x\le a^2-2a+1, 2x\ge 3a-a^2-1$, $x\ge \frac{3a-a^2-1}{2}$. Так как $\frac{-a^2+3a-1}{2}=\frac{a-(a-1)^2}{2}\le \frac{a}{2}$, то решением будет $x\in\left[\frac{-3a-a^2-1}{2};\frac{a}{2}\right]$. Ответ: при $a\ge 1$ $x\in\left[\frac{-3a-a^2-1}{2};\frac{a}{2}\right]$; при $a<1$ решений нет.

2) Так как $998669=(100)^3-11^3$, то получим: $998669=89\cdot(100^2+100\cdot 11+11^2)=89\cdot 11221$. Но число 89, как известно простое, поэтому нужно искать делители числа 11221. Среди таких делителей могут быть только числа, у которых последняя цифра либо 1, либо 3, либо 7, либо 9. Проверяя число 7 убеждаемся, что оно является делителем чиста 11221. Имеем: $11221=1603\cdot 7$ Далее находим, что $1603=229\cdot 7$. Так как число 229 простое, то других делителей нет. Ответ: $998669=89\cdot 7^2\cdot 229$.

3) Так как переменные x и y входят в выражение только в виде абсолютных величин, то область будет симметрична как относительно оси OX так и относительно оси OY, т.е. достаточно нарисовать область только в первой четверти , вычислить её площадь, а затем полученное число умножить на 4, это и будет ответ. Таким образом, в I четвери неравенство имеет вид: $2|y-x|+|x-2|\le 2$. Рассмотрим два случая: 1) $0\le x\le 2$ 2) $x\ge 2$. В первом случаи получим: $2|y-x|-x+2\le 2$, $2|y-x|\le x \Leftrightarrow 4(y-x)^2\le x^2 \Leftrightarrow (2y-3x)\cdot(2y-x)\le 0$. Для второго случая имеем: $2|y-x|+x-2\le 2$, $2|y-x|\le 4-x \Leftrightarrow 2\le x\le 4$. Отсюда: $4(y-x)^2\le(4-x)^2 \Leftrightarrow (2y-x-4)\cdot(2y-3x+4)\le 0$. С учетом полученных неравенств нарисуем в I четверти области, ограниченные данными прямыми. Получим четырехугольник AOBC, который является параллелограммом; его вершины находятся из полученных ограничений на x: O (0; 0), A (2; 1), B (4; 4), C (2; 3). Площадь данного параллелограмма равна двум площадям OCA. Так как $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$, то $S_{OAC}=3-1=2$. А отсюда вся площадь равна 8. Ответ: {8}.

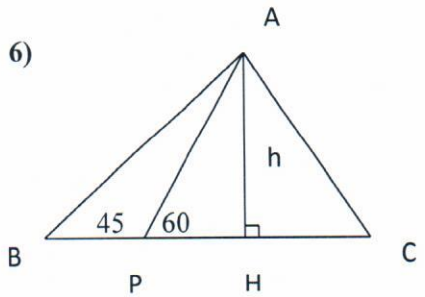


4) Пусть $x = 100$, тогда $11 \cdot 9 \cdot 2 = 18 \cdot 11$, т.е. имеем равенство, значит уравнение имеет действительные решения. Покажем, что если x_0 - корень данного уравнение , то $\frac{1}{x_0}$ также корень. Действительно: $11\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} - 1\right)\lg\frac{1}{x_0} = 18\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} + 1\right) \Leftrightarrow 11(\sqrt{x_0} - 1)\lg x_0 = 18(1 + \sqrt{x_0})$.

Значит , если уравнение имеет какой-то корень x, то $\frac{1}{x}$ так же корень. Поэтому произведение всех корней равно 1. Ответ $-\{1\}$

5) $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = xy + 61$. Обозначаем $x - y = m$, $xy = n$, тогда $m \cdot (m^2 + 3n) = n + 61$, $m^3 + n(3m - 1) = 61 \Rightarrow 1 \le m \le 3$. При $m = 1$ получим $2n = 60$, $n = 30$, тогда $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 30 \end{cases}$, $y^2 + y - 30 = 0$, $y = \frac{-1 \pm 11}{2} = (5, -6)$. Отсюда $x = 6$, $y = 5$ при $m = 2$ имеем: $8 + 5n = 61 \Rightarrow n$ -нецелое . При $m = 3$ получим $27 + 8n = 61$, $8n = 34$, n - нецелое. Поэтому ответ : $x = 6$, $y = 5$.

6)



Пусть ABC данный треугольник, где $\angle B = 45^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, $2PB = PC$. Найти угол C.

Решение: Проведем $AH \perp BC$ и пусть $AH = h$. Тогда $BH = AH = h$, $PH = h \cdot ctg60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$,

$BP = BH - PH = h \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), BC = BP + PC = 3 \cdot BP = (3 - \sqrt{3}) \cdot h$

$CH = BC - BH = (3-\sqrt{3})\cdot h - h = (2-\sqrt{3})\cdot h \Rightarrow \frac{AP}{HC} = tg\hat{C}$, $\frac{h}{(2-\sqrt{3})\cdot h} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.

Но $tg75^\circ = tg(45+30) = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$. Следовательно

$\angle C = 75^\circ$. Ответ: $\angle C = 75^\circ$.

7) Рассмотрим векторы $\overline{a}$ ($1, 1, \sqrt{2}$) и $\overline{b}$ ($\sin\frac{x}{2}\cos 2y, \cos\frac{x}{2}\cos 2y, \sin 2y$). Имеем:

$|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 1$. Так как $f(x,y) = \overline{a}\cdot\overline{b}$, где $\overline{a}\cdot\overline{b}$ -скалярное произведение векторов, то $-|\overline{a}||\overline{b}| \le f(x,y) \le |\overline{a}||\overline{b}|$, т.е. $-2 \le f(x,y) \le 2$. Поэтому , если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены, то $\min f(x,y) = -2, \quad \max f(x,y) = 2$. Ответ : $\min f(x,y) = -2, \quad \max f(x,y) = 2$

8) Пусть в первой урне x шаров, из них a белых. Во второй урне y шаров, из них b белых. Тогда вероятность того, что оба белые равна $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y} = 0{,}54 = \frac{27}{50}$. Значит дробь $\frac{ab}{xy}$ равна (возможно после сокращения) $\frac{27}{50}$, а значит произведение xy кратно 50. Это возможно лишь двумя способами: $x = 5, \quad y = 20$ или $x = 10, \quad y = 15$. В первом случаи получаем. Что $ab = 54$, во втором $ab = 81$. Тогда в первом случаи $a < 5, \quad b < 20$. Но это возможно лишь при $a = 3, \quad b = 18$. А тогда черных шаров в первой урне $5-3=2$, а во второй - $20-18=2$ и следовательно вероятность обоих черных равна $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{20} = 0{,}04$. Во втором случаи, когда $ab = 81$ и $a < 10, \quad b < 15$, т.е. $a = b = 9$. Отсюда вероятность двух черных шаров равна $\frac{10-9}{10}\cdot\frac{15-9}{15} = \frac{6}{150} = 0{,}04$. Ответ : 0,04.