Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 1 (Задание)

Шифр_____

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Вставить пропущенное число. Ответ должен быть обоснован.

12	20	36	42
8	10	?	13

2. Решить уравнение $x+98=99\left(99x^3-98\right)^3$;

3. Решить неравенство $\dfrac{\left|x^2-4\right|+\left|x^2-2x+3\right|+7-2x}{\sqrt{24-10x+x^2}-x+4}\le 0$;

4. Решить уравнение $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=\left(\sin x+\sin 2x+\sin 3x\right)^3$;

5. В ожесточённой драке 70% фанатов «Спартака» повредили глаз, 75% - ухо, 80% - руку, 85% - ногу. Какой процент фанатов заведомо повредили одновременно и глаз, и ухо, и руку, и ногу?

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2(1-x)^4-a=0$ имеет ровно три решения.

7. Чашка, имеющая форму полушара, наполнена водой, а затем наклонена на угол 45° относительно оси полушара. Найти процент оставшейся в чашке воды.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 2 (Задание)

Шифр_____

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Вставить пропущенное число. Ответ должен быть обоснован.

$2x^2-x-1=0,$	$x^4-x^3-x^2-x-2=0,$	1
$x^4+5x^2-6=0,$	$x^3+x^2-2=0,$	? ;
$x^2-7x+12=0,$	$x^2\lvert x\rvert-4x^2+\lvert x\rvert+6=0,$	432

2. Решить уравнение $x+1=2\left(2x^3-1\right)^3$;

3. Решить неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)}{3^{2x^2}-3^{x-1}}\le 0$;

4. Решить уравнение $\sin 2x+tgx=2$;

5. В классе 25 учеников. Из них 17 умеют ездить на велосипеде, 13 умеют плавать, а 8 – ходить на лыжах. Ни один из учеников не владеет всеми тремя видами спорта, но как велосипедисты, так и пловцы, и лыжники имеют хорошие или удовлетворительные оценки по математике, что тем более знаменательно, так как 6 учеников имеют «неуд» по этому предмету. Сколько пловцов умеют ходить на лыжах?

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x-x^3-a=0$ имеет ровно два решения.

7. Конус, представляющий в осевом сечении равносторонний треугольник, укреплён вершиной вниз. В этот конус положен шар радиуса r, касающийся поверхности конуса , а затем налита вода, уровень которой касается шара. Найти высоту воды в конусе, если шар будет вынут.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 3 (Задание)

Шифр_____

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Написать пропущенное выражение. Ответ должен быть обоснован.

Каракатица	$4x+2y-7<0$
Математика	$3x+2y+2z-8<0$
Медведица	?
Криминалистика	$4x+2y+2z-9<0$

;

2. Решить уравнение $x+2010=2011\left(2011x^3-2010\right)^3$;

3. Решить неравенство $\dfrac{\log_x\left(\log_2(x-1)\right)-1}{|2x-9|+|5-2x|-3}\le 0$;

4. Решить уравнение $\sin x+tg\dfrac{x}{2}=2$;

5. На экзамене по математике были предложены три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800 человек, по геометрии – 700, по тригонометрии – 600. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 человек, по алгебре и тригонометрии – 500, по геометрии и тригонометрии – 400, а 300 человек решили все три задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^3\left(1-x^2\right)^2-a=0$ имеет ровно два решения.

7. В шаре радиуса R просверлено цилиндрическое отверстие ; Ось цилиндра проходит через центр шара, а диаметр основания цилиндра равен радиусу шара. Вычислить объём оставшейся части шара.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 4 (Задание)

Шифр_____

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Написать пропущенное число. Ответ должен быть обоснован.

10	14	17	45
1	2	?	0

2. Решить уравнение $\frac{x+2}{3}=\left(3x^3-2\right)^3$;

3. Решить неравенство $\frac{\log_2\left(x^2-2\right)-\log_2 x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}}\le 0$;

4. Решить уравнение $\cos^3 x+\cos^3 2x+\cos^3 3x=\left(\cos x+\cos 2x+\cos 3x\right)^3$;

5. Из 100 опрошенных студентов 24 не изучают ни английский, ни немецкий, ни французские языки. 48 изучают английский, 8 – английский и немецкий, 26 – французский, 8 – французский и английский, 13 – французский и немецкий, 28 – немецкий. Сколько студентов среди опрошенных одновременно изучают английский, немецкий и французский языки?

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^3+x^2-x+2-a=0$ имеет ровно три решения.

7. Радиус основания конуса R, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этот конус вписан ряд шаров так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, а каждый следующий – боковой поверхности конуса и предыдущего шара. Найти предел, к которому стремиться сумма объёмов этих шаров, если их число бесконечно увеличивается.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 5 (Задание)

Шифр_____

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Написать пропущенные функции. Ответ должен быть обоснован.

$$\frac{x-2}{x} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \quad -\mathrm{ctg}x \quad \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{2}{x^2} \quad ? \quad ? \quad \frac{1}{2}\sin x;$$

2. Решить уравнение $\frac{x}{2} = \left(2(x-1)^3 - 1\right)^3$;

3. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}} \le 0$

4. Решить уравнение $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} = 2 + \dfrac{1}{2}\sin 2x - ctgx$;

5. В классе 30 человек. Из них 19 умеют ездить на велосипеде, 16 умеют плавать, а 9 – имеют разряды по стрельбе. Никто из учеников не владеет всеми тремя видами спорта, но как велосипедисты, так и пловцы, и стрелки имеют хорошие или удовлетворительные оценки по физике, что тем более знаменательно, так как 8 учеников имеют «неуд» по этому предмету. Сколько пловцов имеют разряды по стрельбе?

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x(1-x^4)-a=0$ имеет ровно два решения.

7. Конус, высота которого H и радиус основания R, укрепили в отвесном положении вершиной вниз. В конус налита вода до высоты h и вложен железный шар радиуса r, погрузившийся в нее полностью. На какой высоте будет уровень воды?

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» на 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 1. (Решение)

1. Сумма делителей чисел 12,20 и 42 соответственно равна 8,10,13. А тогда сумма делителей числа 36 равна 11. Следовательно Ответ: 11.

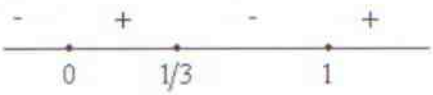
2. Сделав замену $x+98=a,\ 99x^3-98=b$. Получим систему $\begin{cases} a+b=x+99x^3 \\ a=99b^3 \end{cases}$, из которой следует, что $b-x=99\left(x^3-b^3\right)$, а тогда $b=x$, или $99\left(x^2+xb+b^2\right)+1=0$. Второе уравнение решений не имеет, т.к $x^2+xb+b^2>0$. Отсюда получаем, что $98\left(x^3-1\right)+x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(99x^2+99x+98\right)=0 \Rightarrow x=1$, второй множитель равняться нулю не может, т.к. $D<0$. Ответ:$\{1\}$

3. Находим, что ОДЗ $x<4, x\geq 6$. Обозначая $x^2-2x+3=a>0,\ x^2-4=b$, Получим, что числитель будет: $|a|+|b|+a-b>0$ (по свойству модуля). Следовательно неравенство равносильно неравенству $\sqrt{(x-6)(x-4)}<x-4$, решения которого есть $x\geq 6$.
Ответ: $x\geq 6$.

4. Обозначив $Sinx=a, Sin2x=b, Sin3x=c$, получим $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$. Данное равенство легко приводится к виду: $(a+b)(a+c)(b+c)=0$. А тогда, используя формулу $Sin\lambda+Sin\beta=2Sin\frac{\lambda+\beta}{2}Cos\frac{\lambda-\beta}{2}$, получим три серии решений:
Ответ: $\left\{\frac{2k\pi}{3}, \frac{2m\pi}{5}, \frac{\pi n}{2}\right\} k,m,n\in Z.$

5. По условиям задачи следует, что 90% драчунов не повредили хотя бы одну, из перечисленных в задаче частей тела. А тогда 10 – это наименьшее число фанатов, которые наверняка повредили одновременно и глаз, и ухо, и руку, и ногу. Ответ: $\geq 10\%$.

6. Функция $y=x^2(1-x)^4$ есть непрерывная, неотрицательная и дифференцируемая везде. Она равна нулю лишь в двух точках $x=0, x=1$. Производная этой функции равна: $2x(x-1)^3(3x-1)$. Следовательно критические точки суть $x=0, x=1/3, x=1$. А тогда знак производной будет:



Следовательно в точках $x=0, x=1$ имеем минимум, равный нулю, в точке $x=1/3$. максимум равный: $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{729}$. При x<0 функция монотонно убывает, при x>1