Олимпиада «Паруса надежды»
на 2011-2012 г.
Заочный тур (интернет-этап)
Вариант 1.Решение

1. Пусть 1 кг банан стоит x рублей, 1 кг мандарин стоит y рублей, а 1 кг хурмы стоит z рублей. По условиям задачи имеем два уравнения.

$\begin{cases} \frac{x}{2}+2y+z=205 \\ 2x+8y+5z=910 \end{cases}$ Умножая первое уравнение на 4, получим систему

$\begin{cases} 2x+8y+4z=820 \\ 2x+8y+5z=910 \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения, первое получим что z = 90.

Следовательно, 2x + 8y = 460. Или x + 4y = 230. А тогда x + 4y + z = 230+90 = 320.
Ответ: {320}

2. ОДЗ $x \neq 2$; так как $x^2-x+2>0$ для любого x (Д<0), то: $\frac{x^2-x}{|x-2|}+\frac{2}{|x-2|}<|x|+\frac{1}{|x-2|}$;

$x^2.-x+1<|x(x-2)|$ пусть $0 \le x < 2$, тогда: $x^2.-x+1<x^2+2x$; $2x^2-3x+1<0$

$x=\frac{3\pm1}{4}=(1;\frac{1}{2})$. Следовательно: $\frac{1}{2}<x<1$ - решение пусть $x<0; x>2$, тогда

$x^2-x+1<x^2-2x$; $x<-1$

Ответ:{0,5}

3. Имеем: $6Sin\frac{x}{2}+6Sin\frac{x}{2}Cos\frac{x}{2}+2Cosx+2CosxCos\frac{x}{2}=8+8Cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$6Sin\frac{x}{2}(1+Cos\frac{x}{2})+2Cosx(1+Cos\frac{x}{2})=8(1+Cos\frac{x}{2}) \Leftrightarrow (1+Cos\frac{x}{2})(6Sin\frac{x}{2}+2Cosx-8)=0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 1+Cos\frac{x}{2}=0 \\ 3Sin\frac{x}{2}+Cosx-4=0 \end{array}\right.$

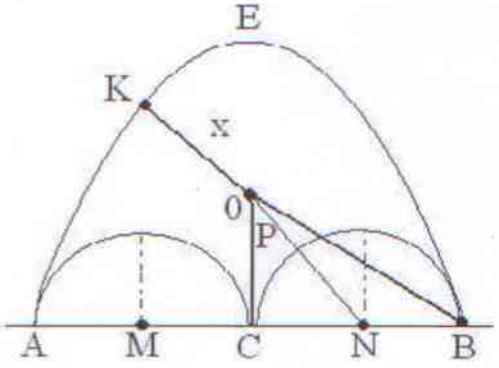
Тогда $Cos\frac{x}{2}=-1, \frac{x}{2}=\pi+2\pi m, x=2\pi+4\pi m, m \in Z$. Докажем, что второе уравнение решений не имеет, т.к и $|Cosx| \le 1$ и $\left|Sin\frac{x}{2}\right| \le 1$, то для второго уравнения получили бы

$\begin{cases} Sin\frac{x}{2}=1 \\ Cosx=1 \end{cases} \Rightarrow x=2\pi k$, а тогда $Sin\pi k=1$, что невозможно. Т.к. $2\pi \approx 6{,}28$, то $[2\pi]=6$.

Ответ:{6}

4. Легко видеть, что если к искомому числу прибавить 1, то результат будет нацело делиться на 2,3,4,5,6. Наименьшее общее кратное чисел 2,3,4,5,6 очевидно есть 60, а значит, все такие числа находятся в ряду 60, 120,180,.. Так как искомое число должно нацело делиться на 7, то в указанном ряду нужно найти наименьшее число, которое при

делении на 7 даёт остаток 1.Этому условию, очевидно, отвечает число 120. А тогда
Ответ:{119}



5. Пусть т. 0 – центр окружности, которая касается дуг AE и BE и полуокружностей с центрами в т. M и N. Пусть т. K – точка касания дуги AE и окружности с центром в т. 0

Решение.

Так как BK=AB по построению, то из симметрии ясно, что т.0 лежит на пересечении BK и высоты EC к стороне AB. Обозначим AB=a. Тогда KB=a и следовательно BO= KB – OK = a-x, где x – радиус искомой окружности. Из треугольника BOC находим, что BC=$\frac{a}{2}$ и $OC^2=(a-x)^2-\frac{a^2}{4}$. Из треугольника OCN находим, что CN = $\frac{a}{4}$, ON= OP + PN, где P – точка касания окружности и полуокружности с центром в т. N. Поэтому ON = $x+\frac{a}{4}$ и $OC^2=(x+\frac{a}{4})^2-\frac{a^2}{16}$. Следовательно $(a-x)^2-\frac{a^2}{4}=(x+\frac{a}{4})^2-\frac{a^2}{16}$. Отсюда получаем, что x = 0,3a , а тогда $OC=\frac{a\sqrt{6}}{5}=\frac{5}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{5}=1$.

Ответ: {1}

6. Будем искать разложение многочлена $x^4-2x^2-12x-8$ на произведение множителей квадратичного вида:

$x^4-2x^2-12x-8=(x^2+ax-2)(x^2+bx+4)$, где a , b некоторые числа. Из этого равенства получим систему:

$\begin{cases} a+b=0 \\ 2+ab=-2 \\ 4a-2b=-12 \end{cases}$ Решая её, находим, что $\begin{cases} b=-a \\ b=2 \\ 2a-b=-6 \Rightarrow a=-2. \end{cases}$

Следовательно $(x^2-2x-2)(x^2+2x+4)=0$. Так как второй квадратичный множитель решений не имеет (D<0), то $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$. А тогда $x_1+x_2=2$ и следовательно
Ответ:{2}

Олимпиада «Паруса надежды»
на 2011-2012 г.
Заочный тур (интернет-этап)
Вариант 2. Решение.

1. Так как нужно подойти к каждому яблоку и возвратиться обратно к корзине, то число пройденных метров будет равно удвоенной сумме первых ста чисел, или сто раз взятому 101, т.е. 10100 м.
Ответ: {10100 метров}

2. Обозначим $\varphi(x)=\sqrt{4-x}-2, f(x)=x|x-3|+4x$. Для функции $\varphi(x)$ ОДЗ будет $4-x\ge 0$, т.е. $x\le 4$. Заметим, что $\varphi'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}<0$, т.е. функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая.

Функция $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x\ge 3\\ 7x-x^2 & x<3\end{cases}$ Поэтому её производная $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & x\ge 3\\ 7-2x & x<3\end{cases}$ положительна и следовательно функция $f(x)$ монотонно возрастает. Так как при $x=0$ $\varphi(0)=f(0)$, то при $0\le x\le 4$ $\varphi(x)\le f(x)$ и следовательно область решений данного неравенства $0\le x\le 4$. А тогда Ответ: {4}

3. Преобразуя уравнение , имеем :

$6SinCosx-6Cosx+2Sin^2x+6Sinx-8=0$

$6Cosx(Sinx-1)+2(Sin^2x+3Sinx-4)=0.$

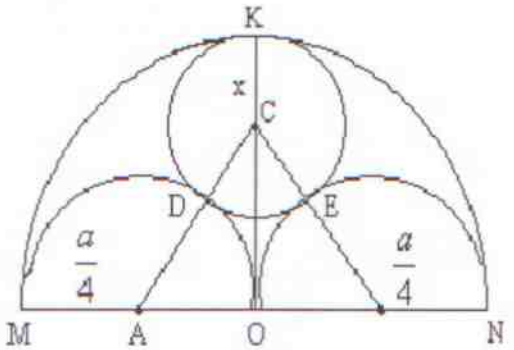
Решая уравнение $Sin^2x+3Sinx-4=0$ Находим, что $Sinx=\dfrac{-3\pm 5}{2}=(-4;1)$. Следовательно имеем: $3Cosx(Sinx-1)+2(Sinx-1)(Sinx+4)=0$ или $(Sinx-1)(3Cosx+2Sinx+8)=0$ Тогда Sinx = 1, т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$. Второй множитель не равен нулю, т.к. всегда $|Cosx|\le 1, |Sinx|\le 1$. Отсюда Ответ: {1}

4. Предположим, что Иван, Богдан и Роман выкуривают за день табаку на x, y, z рублей. Тогда из условий задачи получим, что

$\begin{cases}x+y=40\\ x+z=80\\ y+z=100\end{cases}$ Решая эту систему, находим, что x = 10, y = 30, z = 70.

А тогда ответ на решение задачи будет: $\dfrac{1200}{110}=\dfrac{120}{11}\approx 10{,}90$. Следовательно,

Ответ: {11 дней}



5. Дано: A, B, C – центры полукругов, O – центр большого полукруга, MN = 6.

Решение.

Из симметрии ясно, что т. C лежит на KO = ON и KO $\perp$ MN. Пусть D, E – точки касания. Тогда т. A, D, C лежат на одной прямой, аналогично т. C, E ,B также лежат на одной прямой. Обозначим MN = a, тогда MO = $\frac{a}{2}$ и AD=$\frac{a}{4}$. Пусть KC = x – радиус круга с центром в т. C.

Тогда CO = $\sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{(x+\frac{a}{4})^2 - (\frac{a}{4})^2} = \sqrt{x^2 + \frac{xa}{2}}$. Далее : KO = ON = $\frac{a}{2}$, CO = $\frac{a}{2}$ - x. Поэтому

$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = x^2 + \frac{xa}{2}, \frac{a^2}{4} - ax + x^2 = x^2 + \frac{xa}{2}$. Отсюда находим, что $\frac{3xa}{2} = \frac{a^2}{4}$, т.е. x = $\frac{a}{6}$.

Так как по условию a = 6, то x = 1.

<u>Ответ</u>: {1}

6. Обозначим $x^2 + 2x - 5 = y$. Тогда наше уравнение можно записать в виде системы:

$\begin{cases} x^2 + 2x = y + 5 \\ y^2 + 2y = x + 5 \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим

$y^2 - x^2 + 2y - 2x = x - y, (y-x)(y+x) + 2(y-x) + y - x = 0 \Rightarrow (y-x)(y+x+3) = 0,$ т.е. либо y = x, либо y = -x -3. Тогда в первом случае имеем: $x^2 + 2x - 5 = x,\ x^2 + x - 5 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$; Во втором случае имеем $x^2 + 2x - 5 = -x - 3,\ x^2 + 3x - 2 = 0$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$. Таким образом, корни будут $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{\sqrt{21}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

Далее имеем $\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \approx \frac{-3-4{,}12}{2} = -3{,}56,$ отсюда $[-3{,}56] = -4.$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \approx \frac{-1-4{,}58}{2} = -2{,}79 \Rightarrow [-2{,}79] = -3.$ $\frac{\sqrt{21}-1}{2} \approx \frac{4{,}58-1}{2} = \frac{3{,}58}{2} = 1{,}79 \Rightarrow [1{,}79] = 1;$

$\frac{\sqrt{17}-3}{2} \approx \frac{4{,}12-3}{2} = \frac{1{,}12}{2} = 0{,}56 \Rightarrow [0{,}56] = 0.$ Поэтому <u>Ответ</u>: {-6}