монотонно возрастает. Строя график этой функции, заметим, что при $a = \frac{16}{729}$ прямая y=a будет пересекать график в трёх точках. Ответ: $\left\{\frac{16}{729}\right\}$

7. Объём воды, оставшейся в полушаре после наклона, будет равен объёму сферического сегмента $V_{сегм} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$, где R – радиус сферы, h – высота сегмента. Легко находится, что $h = R\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$. А тогда $V_{сегм} = \frac{\pi R^3}{12}\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(4+\sqrt{2}\right)$ Следовательно

$$\frac{V_{сегм}}{V_{полушара}} = \frac{8-5\sqrt{2}}{8}.$$

Так как $\sqrt{2} \approx \frac{99}{70}$, то отсюда получаем, что $1 - \frac{5\sqrt{2}}{8} \approx 1 - \frac{5}{8}\cdot\frac{99}{70} = \frac{13}{112} \approx 0{,}116$.

Отсюда Ответ: 11,6%.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» на 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 2. (Решение)

1. Корни первого уравнения $-1/2,1,$ корни второго уравнения -1,2. Произведение корней равно 1. Корни первого уравнения третьей строки равны 3,4, корни второго уравнения будут $\pm 2,\ \pm 3$ (с помощью замены $|x| = t$ это уравнение можно представить как $(t-2)(t^2-2t-3)=0$). Отсюда произведение корней равно 432. Находя корни уравнений второй строчки, получим числа $\pm 1.,1$ Следовательно произведение корней равно -1. Ответ:{-1}

2. Обозначив $2x^3-1=b,$ получим систему $\begin{cases} x+1=2b^3 \\ b+1=2x^3 \end{cases}$. Решая её, находим, что b=x, других решений нет. Поэтому имеем $2x^3-x-1=0.$ Это уравнение имеет единственный действительный корень x=1. Ответ:1

3. ОДЗ $x>\frac{1}{2}.$ Так как $2x^2>x-1$ для любого x, то знаменатель неравенства положителен и следовательно по свойствам логарифмической функции получаем неравенство $x \ge 2x-1,$ или $x \le 1.$ Ответ: $\frac{1}{2}<x\le 1$

4. Данное уравнение легко записать в виде: $\frac{Sinx-Cosx}{Cosx}=(Sinx-Cosx)^2.$ Следовательно $Sinx-Cosx=0,$ отсюда $x=\pi/4+\pi k.$ Других решений это уравнение не имеет, т.к после сокращения на множитель $Sinx-Cosx\ne 0,$ получим уравнение $3=Sin2x-Cos2x,$ которое решений не имеет. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z\right\}$

5. По условиям задачи в классе 19 спортсменов, на которых приходится в общей сумме 38 видов спорта, следовательно каждый спортсмен занимается двумя видами спорта. Так как из 19 спортсменов лишь 17 велосипедистов, то двое спортсменов ходят на лыжах и плавают. Ответ: {2}

6. Функция $y=x-x^3=x(1-x^2)$нечётна, непрерывна, дифференцируемая и равна нулю в точках 0, $\pm 1.$ Производная функции равна: $y'=1-3x^2.$ Критические точки $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$ По знаку производной находим, что в точке $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет минимум, в точке $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - максимум. В интервалах $x<-\frac{1}{\sqrt{3}}, x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция монотонно убывает, в интервале

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция возрастает. А тогда, построив график этой функции, заметим что при $a = \pm f\left(\frac{1}{3}\right)$ прямая y = a будет пересекать график в двух точках.

<u>Ответ</u>: $\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

7. Если изобразить осевое сечение конуса в виде правильного треугольника ABC, где AB – уровень воды, то длина стороны AB равна $2r\sqrt{3}$, где r – радиус шара, а высота CD – проведённая на AB , равна 3r. Тогда искомый объём воды в конусе $V = V_к - V_{шара} = 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$. Этот объём воды будет иметь форму конуса и после удаления шара, а тогда полученный конус подобен первоначальному. Если h – искомая высота, то так как объёмы подобных конусов относятся как кубы их высот, то $V : V_к = h^3 : CD^3$, т.е. $\frac{5}{3}\pi r^3 \Big/ 3\pi r^3 = h^3 : 27r^3$. Отсюда $h = r\sqrt[3]{15}$. <u>Ответ</u>: $r\sqrt[3]{15}$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» на 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 3. (Решение)

1. В слове каракатица повторяющихся букв «а» - 4, «k» - две, что на 1 меньше 7. В слове математика повторяющихся букв «а» - 3, «м» - две, «т» - две, что на единицу меньше числа 8. В слове криминалистика всего повторяющихся букв 8, что на 1 меньше 9. Так как в слове медведица повторяющихся букв 4, что на 1 меньше 5, то пропущенное выражение будет $2x + 2y - 5 < 0$.

2. Обозначив $2011x^3 - 2010 = a$, получим систему $\begin{cases} x + 2010 = 2011a^3 \\ a + 2010 = 2011x^3 \end{cases}$. Из неё находим, что x = a или $2011\left(x^2 + xa + a^2\right) + 1 = 0$. Это уравнение решений не имеет, т.к. $x^2 + xa + a^2 > 0$ для всех a, x .

Следовательно $2011x^3 - 2010 = x, 2010\left(x^3 - 1\right) = x - x^3 \Rightarrow x = 1$ или $x^2 + x + \frac{2010}{2011} = 0$. В действительных числах это уравнение не имеет решений. <u>Ответ</u>: {1}

3. Имеем $|2x-9| + |5-2x| - 3 = |2x-9| + |5-2x| + 2x - 9 + 5 - 2x + 1$, что по свойству модуля означает, что знаменатель всегда положителен. А тогда неравенство равносильно неравенству $\log_x\left(\log_2(x-1)\right) - 1 \le 0$. Найдя ОДЗ, получим, что x > 2. Следовательно $\log_2(x-1) \le x$, что верно для любого $x \in ОДЗ$. <u>Ответ</u>: x > 2.

4. Исходное уравнение можно представить в виде:

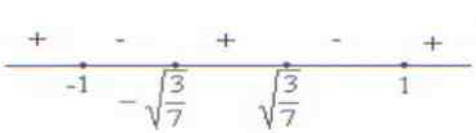
$$1 - 2Sin(x/2)Cos(x/2) = \frac{Sin(x/2) - Cos(x/2)}{Cos(x/2)} \Leftrightarrow \left(Sin(x/2) - Cos(x/2)\right)^2 = \frac{Sin(x/2) - Cos(x/2)}{Cos(x/2)};$$

Значит $Sin(x/2) - Cos(x/2) = 0$, поэтому $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. разделив на $Sin(x/2) - Cos(x/2)$, получим уравнение: $1 + Cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}Sinx$. Это уравнение решений не имеет.

<u>Ответ</u>: $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\right\}$

5. Число студентов, решивших хотя бы одну задачу, будет равно:
$800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900 чел.$ А тогда число студентов, не решивших ни одной задачи равно 100. <u>Ответ</u>: 100

6. Функция $y = x^3\left(1 - x^2\right)^2$ очевидно нечётна, непрерывна и дифференцируемая. Её производная $y' = \left(7x^2 - 3\right)\left(x^2 - 1\right)x^2$. Критические точки $x = \pm 1, x = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}$. Знак y' будет



Следовательно в т. x = -1 имеет максимум, равный нулю, в т. x =1 имеет минимум, также равный нулю. В точках $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$ имеем экстремум. С учётом

монотонности функция на $\left(-\sqrt{\frac{3}{7}},\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ построим график , из которого следует, что два решения будут, если $a=\pm f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)=\pm\frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

7. Построив осевое сечение шара, проходящее через центр шара т. О и обозначив через H – высоту цилиндра, h – высоту сферического сегмента, легко находим, что $h=R-\frac{H}{2}$. По т. Пифагора найдём, что $H=R\sqrt{3}$, значит $h=R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Так как по условию радиус основания цилиндра равен $\frac{R}{2}$, то искомый объём оставшейся части шара равен: $V = V_{шара} - (2V_{сегм} + V_ц)$, где $V_{сегм}$ - объём шарового сегмента, $V_ц$ – объём цилиндра. Но

$V_c=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}$, а объём $V_{сегм} = \pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\pi R^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(R-\frac{R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)=\pi R^3\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

И тогда находим, что $V=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}-\pi\left(\frac{4}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^3=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$.

<u>Ответ</u>: $\left\{\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}\right\}$

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» на 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 4. (Решение)

1. В нижней части таблицы стоят остатки от деления соответствующего верхнего числа на 3. Так как остаток от деления 17 на 3 равен 2, то Ответ: {2}

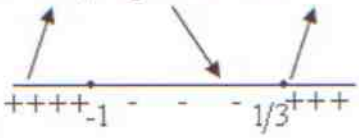
2. Обозначая $y = 3x^3 - 2$, получим систему $\begin{cases} x + 2 = 3y^3 \\ y + 2 = 3x^3 \end{cases}$. Вычитая из первого уравнения второе, имеем $x - y = 3\left(y^3 - x^3\right)$. Отсюда либо y = x, либо: $3\left(x^2 + yx + y^2\right) + 1 = 0$. Это уравнение решений не имеет, т.к. выражение $x^2 + y^2 + xy$ есть неполный квадрат суммы, следовательно всегда ≥ 0. Поэтому получаем, что $x + 2 = 3x^3$, отсюда $x - 1 = 3(x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$, т.е. x = 1, других решений нет. Ответ: {1}

3. $ОДЗ x > \sqrt{2}$. С учётом свойств логарифма и показательной функции неравенство равносильно двум системам $\begin{cases} x^2 - 2 \geq x \\ 3x^2 > 2x + 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 2 \leq x \\ 3x^2 < 2x + 1 \end{cases}$. Тогда первая система имеет решение $x \geq 2$, вторая система в ОДЗ решений не имеет. Ответ: $x \geq 2$.

4. Обозначая Cos x = a, Cos 2x = b, Cos 3x = c, получим: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$. Пользуясь формулой сумма кубов и преобразовывая, получим: $(a+b)(a+c)(b+c) = 0$. Возвращаясь к старым переменным и по формуле для $Cos\lambda + Cos\beta$, получим ответ:
$x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi m_1, x_2 = \pi + 4\pi m_2, x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m_3}{2}, x_4 = \frac{\pi}{2} + \pi m_4, x_5 = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m_5}{5}$, где $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \in Z$.

5. Пусть n(x), n(y) количество элементов множеств x и y. Тогда n(x+y)=n(x)+n(y)-n(xy), где n(xy) – число элементов, принадлежащих как множеству x, так множеству y. Отсюда следует, что n(x+y+z)=n(x)+n(y)+n(z)-n(xy)-n(xz)-n(yz)+n(xyz). Если n(x), n(y), n(z) количество студентов, изучающих соответственно английский, немецкий или французский язык, то по формуле $n(xyz) = 76 - 48 - 28 - 26 + 8 + 8 + 3 = 3$. Ответ: {3}

6. Функция $y(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ непрерывна, дифференцируема и пересекает ось ox в одной точке x = -2. Её производная равна $3x^2 + 2x - 1$. Тогда критические точки $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$. По знаку производной находим, что



т.е в т. x = -1 имеем максимум, равный 3 и в точке $x = \frac{1}{3}$ минимум, равный $\frac{49}{27}$. Тогда построив график этой функции, заметим, что прямая y = a будет пересекать график $y = x^3 + x^2 - x + 2$ в трёх точках, если $f\left(\frac{1}{3}\right) < a < f(-1)$. Следовательно ответ: $\frac{49}{27} < a < 3$.

7.Строим осевое сечение конуса, заполненного шарами. Пусть т. С - вершина конуса, АВ – лежит на основании. Обозначим радиусы шаров, расположенных снизу вверх через $r_1, r_2, r_3, ...$ центры этих шаров соответственно $O_1, O_2, O_3, ...$ Обозначим через N и M точки касания первых двух шаров со стороной АС. Пусть K- проекция т. o_2 на No_1. Тогда $O_1O_2 = r_1 + r_2, O_1K = r_1 - r_2$. Обозначим $\angle CAB = \lambda$, тогда $\angle O_1AB = \lambda/2$. Находим, что $r_1 = Rtg\,\lambda/2$, где R – радиус основания конуса. Очевидно, что $\angle O_2O_1K = \lambda$. Отсюда $\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = Cos\lambda, \frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + Cos\lambda}{1 - Cos\lambda} = Ctg^2(\lambda/2)$. А тогда $r_2 = Rtg^3(\lambda/2)$. Поэтому объём первого шара $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 tg^3(\lambda/2)$, объём второго шара $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 tg^9(\lambda/2)$, объём третьего $V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 tg^{15}(\lambda/2)$ и т.д. Следовательно объёмы шаров образуют бесконечную убывающую прогрессию $(tg(\lambda/2) < 1!)$, знаменатель которой равен $tg^6(\lambda/2)$. Сумма этой прогрессии равна $S = \frac{a_1}{1-q}$, где a_1 – первый член, q – знаменатель. Отсюда находим, что $S = \frac{4/3\,\pi R^3 tg^3(\lambda/2)}{1 - tg^6(\lambda/2)}$. <u>Ответ</u>: $\frac{4/3\,\pi R^3 tg^3(\lambda/2)}{1 - tg^6(\lambda/2)}$.

Межрегиональная отраслевая олимпиада
школьников «Паруса надежды» на 2011-2012 г.
Заключительный этап
Вариант 5. (Решение)

1. Та как в нижней таблице в заполненных клетках стоят производные функций верхней таблицы, то нужно найти производные функций $\frac{1}{\sqrt{x}}$ и –Ctgx. Поэтому Ответ:

$-\frac{1}{2}x^{-3/2}, \frac{1}{Sin^2 x}$

2. Пусть x - 1 = t, тогда $\frac{t+1}{2} = \left(2t^3 - 1\right)^3$. Заменим выражение $2t^3 - 1$ через y , получим систему $\begin{cases} t+1 = 2y^3 \\ y+1 = 2t^3 \end{cases} \Leftrightarrow t - y = 2\left(y^3 - t^3\right) \Leftrightarrow t = y$ или $2\left(t^2 + yt + y^2\right) + 1 = 0$. Второе уравнение решений не имеет т.к. $t^2 + y^2 + yt \geq 0$ для любого t. Поэтому имеем: $2t^3 - 1 = t, t^3 - 1 = t - t^3, (t-1)\left(t^2 + t + 1\right) = t(1-t)(1+t)$. Следовательно t = 1, или $2t^2 + 2t + 1 = 0$. Уравнение решений не имеет. Ответ: x = 2.

3. $ОДЗ: x \geq 2$. Данное неравенство равносильно решению двух систем: $\begin{cases} x^2 - 2x \geq x - 2 \\ 3x^2 > x + 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 2x \leq x - 2 \\ 3x^2 < x + 4 \end{cases}$. Решая первую систему найдём, что решение будет $x \geq 2$, решая вторую систему получим, что в ОДЗ решений нет. Ответ: $x \geq 2$.

4. Преобразуя уравнение, получим $\left(Sinx - \frac{1}{Sinx}\right)^2 = Cosx\left(Sinx - \frac{1}{Sinx}\right)$. Следовательно или $Sinx - \frac{1}{Sinx} = 0$ или $Sinx - \frac{1}{Sinx} = Cosx$. Тогда Cosx = 0, т. е. $x = \pi/2 + \pi k, k \in Z$. Из второго равенства находим, что или Cosx = 0 или tgx=-1. Отсюда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m$.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi m, \frac{\pi}{2} + \pi k, k, m \in Z\right\}$

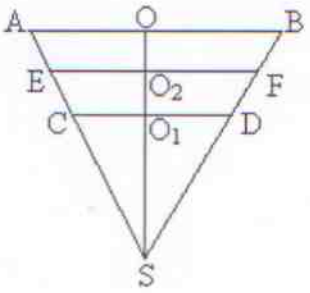
5. Из условий задачи следует, что в классе 22 спортсмена. Всего видов спорта, которыми они занимаются, равно 19+16+9=44, т.е каждый спортсмен занимается какими-то двумя видами спорта, но ни один из них не владеет тремя. Из условий задачи следует, что 3 чел не умеют ездить на велосипеде, 6 – не умеют плавать и 10 не имеют разряда по стрельбе. Значит 3 человека, не умеющих ездить на велосипеде, занимаются и плаваньем и стрельбой. Ответ: {3}

6. Функция $y = x\left(1 - x^4\right)$ является непрерывной, дифференцируемой и нечётной функцией, равной нулю в т.О и ± 1. Производная этой функции равна $y' = 1 - 5x^4$. Следовательно $y' = 0$ при $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ По знаку производной находим, что т. $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ - точка минимума,

$x = +\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ - точка максимума. Построив график этой функции, заметим, что прямая y = a будет пересекать график функции в двух точках лишь при $a = \pm y\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right) = \pm\frac{4}{5^{\frac{5}{4}}}$. Ответ:

$\left\{\pm\frac{4}{5^{\frac{5}{4}}}\right\}$.

7. Проведём осевое сечение конуса, высота которого H, радиус основания R, первоначальная высота воды в конусе h . По условию OS=H, O_1S=h, OB=R, CD – первоначальная линия воды.



Решение

Пусть $O_1D = r_1$, $O_2F = r_2$, тогда $\frac{r_1}{R} = \frac{h}{H}, r_1 = \frac{Rh}{H}$. Следовательно первоначальный объём $V_1 = \frac{\pi h^3 R^2}{3H^2}$. После погружения шара объём воды равен $V = V_1 + V_{шара}$. Из подобия находим, $\frac{r_2}{R} = \frac{x}{H}$, где O_2S = x – высота воды после погружения шара. Далее $V = \frac{1}{3}\pi r_2^2 x = \frac{\pi R^2 x^3}{3H^2}$. Отсюда: $\frac{\pi R^2 x^3}{3H^2} = \frac{\pi h^3 R^2}{3H^2} + \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R^2 x^3 = h^3 R^2 + 4r^3 H^2$. А тогда Ответ: $x = \sqrt[3]{h^3 + \frac{4H^2 r^3}{R^2}}$