Олимпиада школьников
«Звезда — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Отборочный тур

2014–2015

Решения, указания, ответы и критерии оценивания

9 класс

1. В купе железнодорожного вагона один напротив другого стоят два дивана, на каждом из которых по четыре места. Из восьми пассажиров трое желают сидеть лицом в направлении движения поезда, а двое — спиной. Сколькими способами могут разместиться пассажиры, с учётом их пожеланий?

Ответ: 1728.

Решение. Пусть A, B и C хотят смотреть вперёд по ходу движения поезда, у D и E — «противоложное» желание, а F, G и H — всё равно, как сидеть. Тогда A выбирает место 4 способами, после чего у B — 3 варианта. Далее указываем для каждого пассажира число способов выбрать место, в предположении, что предшествующие пассажиры уже заняли свои места: C — 2, D — 4, E — 3, F — 3, G — 2, H — 1. Всего, по правилу произведения, получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1728$ способов размещения пассажиров.

Оценивание. За верное решение — 20 б. Ход решения верный, но ошибки при умножении — 15 б.

2. Решите уравнение $(x^2 - 2x + 3)^2 = x^3 + 9$.

Ответ: 0; 3.

Решение. Преобразуем уравнение, воспользовавшись формулой разности квадратов:

$$(x^2 - 2x + 3)^2 - 3^2 = x^3; \quad (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 6) = x^3.$$

Теперь видно, что 0 — корень уравнения. Найдём остальные корни:

$$(x - 2)(x^2 - 2x + 6) = x^2; \quad x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = 0.$$

Перебором натуральных делителей свободного члена находим корень 3, после чего обнаруживаем, что $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$, откуда видно, что других корней нет.

Оценивание. За верное решение — 20 б. Если найден только корень 0, то 4 б. Если потерян корень 0, 10 б.

3. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E — середина AB, F — середина AD. Докажите, что CE и CF делят отрезок BD на три равные части.

Доказательство. Докажем, что отрезок CE делит диагональ BD в отношении $1:2$, считая от вершины B. Пусть $K = BD \cap EC$, T — середина CD, $L = BD \cap AT$. Треугольники ATD и CEB — равные (по двум катетам). Отсюда $\angle TAD = \angle ECB$ и $EC \parallel AT$. Значит, EK — средняя линия в треугольнике ABL, а LT — средняя линия в треугольнике KDC. Поэтому $BK = KL = LD$ и $BK = \frac{1}{3}BD$. Точно так же доказывается, что отрезок CF делит диагональ BD в отношении $1:2$, считая от вершины D.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

4. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости Oxy неравенством $|x| + |y| + |x+y| \leqslant 2$.

Ответ: 3.

Указание. Прямые $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 0$ разбивают плоскость на 6 частей, в каждой из которых все три модуля в левой части неравенства раскрываются единообразно. Фигура представляет собой шестиугольник, площадь которого легко вычисляется.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

5. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 2000.

Ответ: 125.

Решение. Разложим число 2000 на простые множители: $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Из пяти подряд идущих чисел ровно одно делится на 5. В нашем случае это число должно делиться на 5^3. Значит, $n + 3 \geqslant 125$. Легко убедиться в том, что при $n = 122, 123, 124$ наше число не будет делится на 2^4, а при $n = 125$ — будет.

Оценивание. За верное решение — 20 б.