Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания

1 марта 2015 г.

9 класс

1. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. На школьной доске записаны числа 0, 1, 2,..., 30. К доске по очереди по одному разу подходят 30 учеников. Каждый из них выбирает какие-то два числа x и y, стирает их, и записывает число, вычисляемое по формуле $\frac{x+y+|x-y|}{2}$. Какое число может остаться на доске?

Ответ: только 30.

Решение. Легко убедиться в том, что $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \max(x, y)$. Значит, после каждого действия из двух чисел, к которым оно применяется, на доске остаётся максимальное из них. После последнего действия на доске может остаться только наибольшее из исходных чисел.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

3. Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca} = 2.$$

Решение. Преобразуем вторую и третью дробь, умножив числитель и знаменатель второй на a, а третьей на ab.

$$\frac{1+b}{1+b+bc} = \frac{a+ab}{a+ab+abc} = \frac{a+ab}{a+ab+1};$$

$$\frac{1+c}{1+c+ca} = \frac{ab+abc}{ab+abc+abca} = \frac{ab+1}{ab+1+a}.$$

Теперь у всех трёх дробей одинаковый знаменатель, и их легко сложить.

Оценивание. За полное решение — 16 баллов. Если тождество проверено только для каких-то частных случаев, 0 баллов.

4. В треугольнике ABC провели биссектрису CK. Известно, что $\angle BCA = 120^\circ$. Докажите, что $\frac{1}{CK} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$.

Решение. Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $l = CK$.

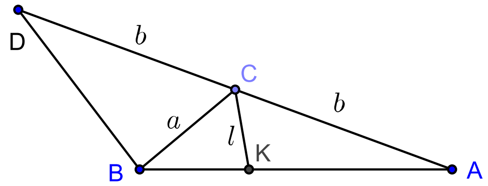

Рис. 1

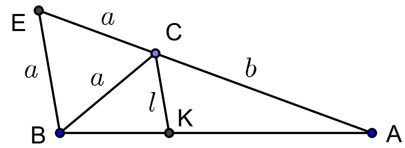

Рис. 2

Первое решение. Пусть на луче AC отложена точка D такая, что $DC = CA$ (рис. 1). Поскольку BC — медиана в треугольнике DBA, а медиана делит площадь треугольника пополам, имеем

$$S_{DCB} = S_{ABC} = S_{BCK} + S_{KCA}. \tag{1}$$

Заметим, что $\angle DCB = \angle BCK = \angle KCA = 60^\circ$. Воспользуемся таким фактом: если у двух треугольников есть общий (по величине) угол, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений сторон, заключающих этот угол. Поделив части равенства (1) на S_{DCB}, получим

$$1 = \frac{S_{BCK}}{S_{DCB}} + \frac{S_{KCA}}{S_{DCB}} = \frac{al}{ab} + \frac{bl}{ab} = \frac{l}{b} + \frac{l}{a}.$$

Отсюда $\frac{1}{l} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$.

Второе решение. Проведём через вершину B прямую, параллельную KC, до пересечения с прямой AC в точке E (рис. 2). Заметим, что $\angle ECB = 60^\circ$ (как внешний угол треугольника BCA), а $\angle EBC = \angle BCK = 60^\circ$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых). Поэтому треугольник BCE — равносторонний. Из подобия треугольников ACK и AEB имеем

$$\frac{a}{l} = \frac{BE}{CK} = \frac{AE}{AC} = \frac{b+a}{b} = 1 + \frac{a}{b}.$$

Поделив обе части равенства $\frac{a}{l} = 1 + \frac{a}{b}$ на a, получим требуемое.

Оценивание. За полное решение — 18 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(x - 2y + 2015) = 2xy.$$

Ответ: $(0;0), (-2015;0), (2014, 2014), (-672, 672)$.

Решение. Если $y = 0$, то $x^2(x + 2015) = 0$ и $x = 0$ или $x = -2015$. При $x = 0$ новых решений уравнения не обнаруживается. Пусть теперь $xy \neq 0$. Тогда и $x - 2y + 2015 \neq 0$. При этом

$$|(x^2 + y^2)(x - 2y + 15)| \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|,$$

а равенство возможно лишь при $|x| = |y|$ и $x - 2y + 2015 = \pm 1$, а именно:

- если $x = y$, то $x - 2y + 2015 = 1$, откуда $x = y = 2014$;
- если $x = -y$, то $x - 2y + 2015 = -1$, откуда $3x = -2016$, $x = -672$, $y = 672$.

Оценивание. За полное решение — 20 баллов. Если рассмотрен только случай $xy = 0$, 6 баллов. Если не рассмотрен случай $xy = 0$, 14 баллов. Если доказано, что при $xy \neq 0$ $|x| = |y|$, но пропущен случай $x = -y$, минус 7 баллов.

6. По кругу записано 100 положительных чисел. Сумма любых двух соседних чисел равна квадрату числа, следующего за ними по часовой стрелке. Найдите все такие наборы чисел.

Ответ: сто двоек.

Решение. Пусть M — наибольшее из всех чисел, а перед ним стоят числа a и b. Тогда $a + b = M^2$, $a \leqslant M$, $b \leqslant M$, откуда $M^2 \leqslant 2M$ и $M \leqslant 2$ (учитываем, что $M > 0$).

Пусть m — наименьшее из всех чисел, а перед ним стоят числа c и d. Тогда $c + d = m^2$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$, откуда $m^2 \geqslant 2m$ и $m \geqslant 2$ (поскольку $m > 0$).

Итак, наибольшее число не больше 2, а наименьшее не меньше 2. Значит, все числа равны 2. С другой стороны, для 100 двоек выполнено условие задачи.

Оценивание. За полное решение — 20 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 5 баллов. Если показано, что все числа должны быть равны 2, но не отмечено, что 100 двоек действительно удовлетворяют условию задачи, 18 баллов.