

Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания

1 марта 2015 г.

8 класс

1. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел прямо под собой крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев после этого полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню, догнав её ещё через 4 минуты. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если его скорость в 5 раз меньше скорости дракона?

Ответ: в 3 раза.

Решение. Пусть y — скорость крысы, а x — скорость Гарри. Скорость дракона $5x$. Крыса и Гарри удалялись друг от друга в течение 0,5 мин со скоростью $y + 5x$, а сближались в течение 4 мин со скоростью $x - y$. Отсюда $0,5(y + 5x) = 4(x - y)$, $4,5y = 1,5x$, $x = 3y$.

Оценивание. За верное решение 16 баллов.

3. Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca} = 2.$$

Решение. Преобразуем вторую и третью дробь, умножив числитель и знаменатель второй на a , а третьей на ab .

$$\frac{1+b}{1+b+bc} = \frac{a+b}{a+ab+abc} = \frac{a+b}{a+ab+1};$$
$$\frac{1+c}{1+c+ca} = \frac{ab+abc}{ab+abc+abca} = \frac{ab+1}{ab+1+a}.$$

Теперь у всех трёх дробей одинаковый знаменатель, и их легко сложить.

Оценивание. За полное решение — 16 баллов. Если тождество проверено только для каких-то частных случаев, 0 баллов.

4. Торт имеет форму равнобедренной трапеции, у которой верхнее основание и боковые стороны в 2 раза меньше нижнего основания. Как разделить торт а) на 3; б) на 4 равные части?

Решение. Пусть E — середина нижнего основания трапеции $ABCD$ (рис. 1).

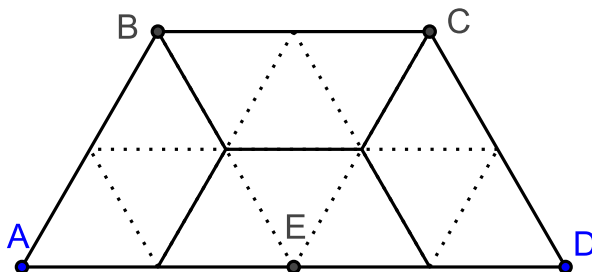


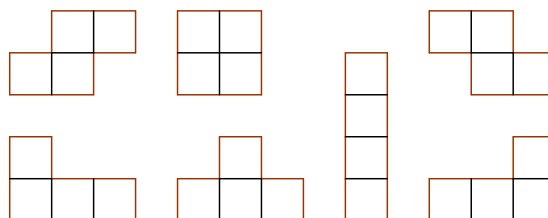
Рис. 1

Тогда $AB = BC = CD = DE = EA$. Четырёхугольник $EBCD$ — параллелограмм (так как $ED = BC$ и $ED \parallel BC$). Поэтому $BE = CD$. Аналогично $AB = EC$. Таким образом, ABE , BCE , CDE — равные треугольники (все их стороны равны между собой). Получили пример разбиения на 3 равные части.

Разобьём теперь каждый из треугольников ABE , BCE , CDE средними линиями на 4 равные части. Получим 12 равных правильных треугольников, которые объединяются в 4 равных трапеции (см. рис. 1).

Оценивание. За полное решение обоих пунктов 18 баллов. За разбиение на 3 равные части: с обоснованием 5 баллов, без обоснования 3 балла. За разбиение на 4 равные части: с обоснованием 13 баллов, без обоснования 10 баллов.

5. Имеется 7 фигурок, изображённых на рисунке, каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратов.



Можно ли ими замостить прямоугольник размером 4×7 ? (Фигурки можно поворачивать).

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём прямоугольник 4×7 на единичные клетки, и раскрасим их в шахматном порядке. Шесть из 7 фигурок покроют по две чёрные и две белые клетки, а седьмая (т-образная)

— три клетки одного цвета и одну другого. Таким образом, если бы удалось разбить прямоугольник на указанные 7 фигурок, то оказалось бы, что они покрывают разное количество белых и чёрных клеток, в то время как их поровну! Полученное противоречие показывает, что требуемое разбиение невозможно.

Оценивание. За верное решение — 18 баллов.

6. В какое наименьшее число цветов можно покрасить натуральные числа, чтобы числа, разность которых — простое число, были разного цвета?

Ответ: 4.

Решение. Оценка. Числа 1, 3, 6 и 8 должны быть разного цвета, поскольку их попарные разности — простые числа. Значит, разных цветов должно быть не меньше четырёх.

Пример. Можно разбить \mathbb{N} на 4 прогрессии с разностью 4, и члены каждой прогрессии покрасить своим цветом.

Оценивание. За полное решение 20 баллов. Если есть только оценка — 10 баллов. Если есть только пример покраски в 4 цвета — 10 баллов.