Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания
1 марта 2015 г.

7 класс

1. Средний рост 6 волейболистов 195 см. Какое наибольшее количество из них может иметь рост больше 199 см?

Ответ: 5.

Решение. Если все 6 волейболистов выше 199 см, то и их средний рост будет больше 199 см. А вот пятеро могут быть выше 199 см, если шестой игрок достаточно невысок. Например, его рост 170 см, а все остальные имеют рост 200 см.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

2. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

3. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел прямо под собой крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев после этого полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню, догнав её ещё через 4 минуты. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если его скорость в 5 раз меньше скорости дракона?

Ответ: в 3 раза.

Решение. Пусть y — скорость крысы, а x — скорость Гарри. Скорость дракона $5x$. Крыса и Гарри удалялись друг от друга в течение 0,5 мин со скоростью $y + 5x$, а сближались в течение 4 мин со скоростью $x - y$. Отсюда $0{,}5(y + 5x) = 4(x - y)$, $4{,}5y = 1{,}5x$, $x = 3y$.

Оценивание. За верное решение 16 баллов.

4. Торт имеет форму равнобедренной трапеции, у которой верхнее основание и боковые стороны в 2 раза меньше нижнего основания. Как разделить торт а) на 3; б) на 4 равные части?

Решение. Пусть E — середина нижнего основания трапеции $ABCD$ (рис. 1).

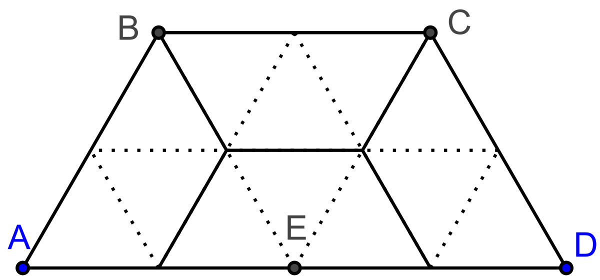


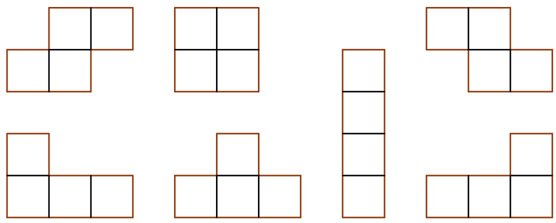
Рис. 1

Тогда $AB = BC = CD = DE = EA$. Четырёхугольник $EBCD$ — параллелограмм (так как $ED = BC$ и $ED \parallel BC$). Поэтому $BE = CD$. Аналогично $AB = EC$. Таким образом, ABE, BCE, CDE — равные треугольники (все их стороны равны между собой). Получили пример разбиения на 3 равные части.

Разобьём теперь каждый из треугольников ABE, BCE, CDE средними линиями на 4 равные части. Получим 12 равных правильных треугольников, которые объединяются в 4 равных трапеции (см. рис. 1).

Оценивание. За полное решение обоих пунктов 18 баллов. За разбиение на 3 равные части: с обоснованием 5 баллов, без обоснования 3 балла. За разбиение на 4 равные части: с обоснованием 13 баллов, без обоснования 10 баллов.

5. Имеется 7 фигурок, изображённых на рисунке, каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратиков.



Можно ли ими замостить прямоугольник размером 4×7? (Фигурки можно поворачивать).

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём прямоугольник 4×7 на единичные клетки, и раскрасим их в шахматном порядке. Шесть из 7 фигурок покроют по две чёрные и две белые клетки, а седьмая (т-образная) — три клетки одного цвета и одну другого. Таким образом, если бы удалось разбить прямоугольник на указанные 7 фигурок, то оказалось бы, что они покрывают разное количество белых и чёрных клеток, в то время как их поровну! Полученное противоречие показывает, что требуемое разбиение невозможно.

Оценивание. За верное решение — 18 баллов.

6. Имеется две кучки спичек: в первой — 61, во второй — 60. Играют двое, ходят поочерёдно. За один ход игрок должен уменьшить число спичек в одной из кучек так, чтобы число оставшихся в ней не было делителем числа спичек в другой кучке и не делилось на него. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?

Ответ: выигрывает второй.

Решение. Стратегия второго игрока: после своего хода оставлять пару вида $\{2k, 2k+1\}$. Ясно, что после хода первого игрока будет пара иного вида $\{x, y\}$. Пусть $x < y$. Если x — чётное, то второй игрок далее оставит пару $\{x, x+1\}$. Если же x — нечётное, то — $\{x-1, x\}$. В конце концов после хода второго игрока останется пара $\{2, 3\}$, и у соперника не будет допустимого хода.

Оценивание. За верное решение — 20 баллов.