Олимпиада школьников
«Звезда - Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
Решения и критерии оценивания
1 марта 2015
6 класс

1. Вычислите $\dfrac{2015}{201520152015^2-201520152016\cdot 201520152014}$

Ответ: 2015.

Решение. Обозначим 201520152015=a, тогда в знаменателе имеем $a^2-(a+1)(a-1)$, что тождественно равно 1.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если честно посчитал, приводя все выкладки, балл не снижать. За ответ без обоснования и вычислений – 0 баллов.

2. Ученики 9 класса физико-математического лицея могут на выбор сдавать ОГЭ по физике или информатике. Каждый ученик должен выбрать хотя бы один предмет. В 2014 году экзамен по физике сдавали 65% девятиклассников, по информатике – 60%. Сколько процентов учеников сдавали и физику, и информатику?

Ответ: 25%.

Решение. Физику не сдавали 35%, а информатику 40%, и это разные люди, поскольку не было тех, кто не сдавал оба предмета. Значит, оставшиеся 25% учеников сдавали оба предмета.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

3. Когда Вася по пути из дома в школу считал ворон, то насчитал их 21. Сколько времени считал ворон Вася, если оно выражается целым числом минут, а в каждую следующую минуту Вася замечал на одну ворону больше, чем в предыдущую? Найдите все возможные варианты.

Ответ: 1, 2, 3, 6 минут

Решение. Если в первую минуту Вася увидел ровно 1 ворону, то он считал ворон 6 минут, так как 1+2+3+4+5+6=21. Значит, Вася считал ворон не более 6 минут. Осуществляем перебор по количеству минут. Если Вася считал ворон 5 минут, и в первую минуту насчитал x ворон, то получаем уравнение $5x+10=21$, которое не имеет решений в целых числах. Аналогично, для 4 минут: $4x+7=21$. Случаи 3 минут, 2 и 1 минуты, очевидно, подходят.

Оценивание. За правильное решение – 16 баллов. За потерю одного из решений минус 4 балла.

4. 25 декабря Васин средний балл по математике за вторую четверть был равен ровно 2,2. Какое наименьшее количество пятёрок по математике должен успеть получить Вася до Нового Года, чтобы его средний балл стал выше 4,5? Считайте, что оценок у Васи было меньше 10, и других оценок, кроме пятёрок, Вася больше получать не будет.

Ответ: 24.

Решение. Пусть S – сумма всех Васиных текущих оценок, n – количество оценок. Тогда S=2,2n или $S=\frac{11}{5}n$. Так как S – целое число, то n кратно 5, но по условию n<10, следовательно, n=5.

Пусть Вася получит $к$ пятёрок, тогда должно быть $11+5к>4{,}5(5+к)$, что равносильно неравенству $к>23$. Значит, $к\geq 24$.

Оценивание. За верное решение 18 баллов.

5. Решите в натуральных числах уравнение $x+\frac{2}{y+\frac{2}{z}}=\frac{7}{3}$.

Ответ: (1;1;4), (2;4;1), (2;5;2).

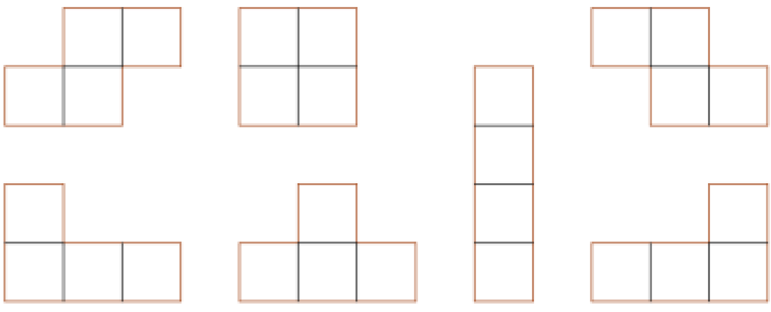
Решение. Так как $\frac{2}{y+\frac{2}{z}}>0$ и $x\in \mathrm{N}$, то x=1 или x=2. Если x=1, то

$y+\frac{2}{z}=\frac{3}{2}$, и, следовательно, y=1, z=4. Если x=2, то $\frac{2}{y+\frac{2}{z}}=\frac{1}{3}$, $y+\frac{2}{z}=6$.

Так как $y\in \mathrm{N}$, то z=1 или z=2, следовательно, соответственно, y=4 или y=5.

Оценивание. За верное решение 18 баллов. За потерю одного из решений минус 4 балла.

6. Имеется 7 фигурок, изображённых на рисунке, каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратиков.



Можно ли ими замостить прямоугольник размером 4×7? (Фигурки можно поворачивать).

Ответ: нельзя.

Решение. Разобьём прямоугольник 4×7 на единичные клетки, и раскрасим их в шахматном порядке. Шесть из семи фигурок покроют по две чёрные и две белые клетки, а седьмая (т-образная) – три клетки одного цвета и одну другого. Таким образом, если бы удалось разбить прямоугольник на указанные 7 фигурок, то оказалось бы, что они покрывают разное количество белых и чёрных клеток, а их должно быть поровну! Полученное противоречие показывает, что требуемое разбиение невозможно.

Оценивание. За верное решение 20 баллов.