

**Олимпиада школьников**  
**«Звезда — Таланты на службе обороны и безопасности»**  
**по математике**

Отборочный тур  
2014–2015

*Решения, указания, ответы и критерии оценивания*

**11 класс**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 15; \\ x^3y - y^3x = 6. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(2; 1), (-2; -1)$ .

**Указание.** Поделив первое уравнение на второе, получим  $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{5}{2}$ . Отсюда  $x = 2y$  или  $y = 2x$ . Но из первого уравнения следует, что  $|x| > |y|$ . Следовательно,  $x = 2y$ .

**Оценивание.** За верное решение — 20 б. Потеряно одно из решений — 10 б.

2. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

**Ответ:** 9.

**Указание.** Нужно просуммировать равенства  $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$  для  $k = 1, 2, \dots, 99$ .

**Оценивание.** За верное решение — 20 б.

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x - \cos x + 1}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{3}} = 0.$$

**Ответ:**  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

4. Пусть  $m$  — количество трёхзначных чисел, у которых средняя цифра меньше крайних, а  $n$  — количество трёхзначных чисел, у которых средняя цифра больше крайних. Чему равна разность  $m - n$ ?

**Ответ:** 45.

**Указание.** Если средняя цифра  $k$ , то чисел первого вида  $(9 - k)^2$ , а второго  $(k - 1)k$ .

**Оценивание.** За верное решение — 20 б. Если ход решения верный, но есть арифметические ошибки, минус 5–10 баллов.

**5.** В куб с ребром 2 вписан шар. Через три вершины куба, имеющие общую смежную вершину, проведена плоскость. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

**Ответ:**  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Указание.** Если  $O$  — центр шара, а  $K$  — точка пересечения диагонали куба и указанной плоскости, то  $OK$  составляет одну шестую диагонали куба.

**Оценивание.** За верное решение — 20 б.