Олимпиада школьников
«Звезда» — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике

Решения и критерии оценивания
1 марта 2015 г.

11 класс

1. Выпускники 11 класса языковой гимназии могут по выбору сдавать ЕГЭ по следующим предметам: обществознание, немецкий язык и английский язык. Каждый ученик должен выбрать не менее двух предметов из трех. В 2014 году ЕГЭ по немецкому языку сдавали 50% выпускников гимназии, по английскому 70% и по обществознанию 90%. Сколько процентов учеников сдавали ЕГЭ по всем трём предметам?

Ответ: 10%.

Решение. Пусть доля учеников, сдававших обществознание и английский равна x, обществознание и немецкий — y, английский и немецкий — z, все предметы — t. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} y+z+t=0{,}5; \\ x+z+t=0{,}7; \\ x+y+t=0{,}9; \\ x+y+z+t=1. \end{cases}$$

Если из суммы первых трёх уравнений вычесть удвоенное четвёртое, получим $t=0{,}1$.

Оценивание. За верное решение — 12 баллов. Если система уравнений составлена верно, но не решена, 4 балла.

2. Вычислите произведение

$$(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)(1+\operatorname{tg} 3^\circ)\ldots(1+\operatorname{tg} 44^\circ).$$

Ответ: 2^{22}.

Первое решение. Заметим, что

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha))=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=2.$$

Множители в вычисляемом произведении разбиваются на 22 такие пары.

Второе решение.

$$\prod_{n=1}^{44}(1+\operatorname{tg} n^\circ)=\prod_{n=1}^{44}\frac{\cos n^\circ+\sin n^\circ}{\cos n^\circ}=\prod_{n=1}^{44}\frac{\cos n^\circ+\cos(90^\circ-n^\circ)}{\cos n^\circ}=$$

$$=\prod_{n=1}^{44}\frac{2\cos 45^\circ\cdot\cos(45^\circ-n)}{\cos n^\circ}=(\sqrt{2})^{44}\cdot\frac{\cos 44^\circ\cdot\cos 43^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 44^\circ}=2^{22}.$$

Третье решение. Каждый множитель можно представить в виде

$$1+\operatorname{tg} n^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} n^\circ = \frac{\sin(n^\circ+45^\circ)}{\cos 45^\circ \cos n^\circ} = \sqrt{2}\,\frac{\cos(45^\circ - n^\circ)}{\cos n^\circ}.$$

После перемножения всех 44 скобок косинусы сократятся.

Оценивание. За верное решение — 13 баллов.

3. Решите уравнение

$$\log_{20}\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right) = \log_{15}\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right).$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Аргументы обоих логарифмов — положительные числа, а их произведение, как легко видеть, равно единице. Если аргументы отличны от 1, то один из них больше 1, а другой меньше 1, из-за чего левая и правая части уравнения будут разных знаков. Если же оба аргумента равны 1, то равенство будет выполняться. Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = 1; \\ \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1), в свою очередь, равносильна уравнению $\cos x = 1$.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 балла. Если задача сведена к системе (1), но та решена неверно (например, получен ответ $x = \pi k$), 8 баллов.

4. Найдите все значения параметра a, при которых многочлен

$$P(x) = x^4 - 2(a+2)x^2 + (a-2)^2$$

можно представить в виде произведения двух многочленов второй степени с целыми коэффициентами.

Ответ: $a = n^2$ и $a = 2n^2$, где n — произвольное целое число.

Решение. Пусть $t = x^2$. Для квадратного трёхчлена $t^2 - 2(a+2)t + (a-2)^2$ имеем $D/4 = (a+2)^2 - (a-2)^2 = 8a$, корни этого трёхчлена (при $a \geqslant 0$) $(a+2) \pm \sqrt{8a}$. Поэтому

$$P(x) = (x^2 - (a+2) - \sqrt{8a})(x^2 - (a+2) + \sqrt{8a}). \tag{1}$$

Разложение (1) непосредственно будет подходящим, если одновременно целыми будут числа $a \pm 2\sqrt{2a}$. Их сумма $2a \in \mathbb{Z}$. При этом $\sqrt{2a} \in \mathbb{Q}$. Значит, $2a = k^2$, где $k \in \mathbb{Z}$. Теперь видно, что a — целое, $k = 2n$ и $a = 2n^2$ для некоторого целого n.

Итак, при $a = 2n^2$ имеем разложение

$$P(x) = (x^2 - 2n^2 - 2 - 4n)(x^2 - 2n^2 - 2 + 4n). \qquad (2)$$

Но этим возможные значения a не исчерпываются!

Заметим, что от разложения (1) можно перейти к разложению на линейные множители. Действительно, $a+2\pm2\sqrt{2a} = (\sqrt{a}\pm\sqrt{2})^2$. Поэтому

$$P(x) = (x-\sqrt{a}-\sqrt{2})(x+\sqrt{a}+\sqrt{2})(x-\sqrt{a}+\sqrt{2})(x+\sqrt{a}-\sqrt{2}). \quad (3)$$

Существует три способа группировки линейных множителей по два. Один из них приводит к (2). Во втором имеем

$$(x - \sqrt{a} - \sqrt{2})(x + \sqrt{a} - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{2})^2 - a = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - a,$$

и коэффициент при x не целый. Третий способ даёт разложение

$$P(x) = (x^2 - 2\sqrt{a}x + a - 2)(x^2 + 2\sqrt{a}x + a - 2).$$

Если $2\sqrt{a} = m \in \mathbb{Z}$, то $a = \frac{m^2}{4}$. Кроме того, свободный член трёхчленов $(a-2)$ — целое число. Значит, и a — целое число. Поэтому $m = 2n$ и $a = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Другой способ решения — метод неопределённых коэффициентов.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если найдена (из-за неполного перебора возможных вариантов) только одна из двух серий, 7 баллов.

5. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(x - 2y + 2015) = 2xy.$$

Ответ: $(0; 0), (-2015; 0), (2014, 2014), (-672, 672)$.

Решение. Если $y = 0$, то $x^2(x + 2015) = 0$ и $x = 0$ или $x = -2015$. При $x = 0$ новых решений уравнения не обнаруживается. Пусть теперь $xy \neq 0$. Тогда и $x - 2y + 2015 \neq 0$. При этом

$$|(x^2 + y^2)(x - 2y + 15)| \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|,$$

а равенство возможно лишь при $|x| = |y|$ и $x - 2y + 2015 = \pm1$, а именно:

- если $x = y$, то $x - 2y + 2015 = 1$, откуда $x = y = 2014$;
- если $x = -y$, то $x - 2y + 2015 = -1$, откуда $3x = -2016$, $x = -672$, $y = 672$.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если рассмотрен только случай $xy = 0$, 4 балла. Если не рассмотрен случай $xy = 0$, 11 баллов. Если доказано, что при $xy \neq 0$ $|x| = |y|$, но пропущен случай $x = -y$, минус 5 баллов.

6. На стороне AB треугольника ABC с тупым углом при вершине C взяли точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Докажите, что

$$2\angle NMK + \angle ACB = 180^\circ.$$

Решение. Точки K и N (середины чевиан) лежат на средней линии B_1A_1 (рис. 1). Пусть $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$, $\varepsilon = \angle KMN$. Заметим, что $c > a$ и $c > b$.

Нетрудно видеть, что $AQ = c - b$, $B_1K = \frac{c-b}{2}$; $BP = c - a$, $A_1N = \frac{c-a}{2}$, $A_1B_1 = \frac{c}{2}$.

Отсюда $B_1N = A_1B_1 - A_1N = \frac{a}{2}$. Но и $B_1M = \frac{a}{2}$ (длина средней линии). Значит, треугольник B_1MN — равнобедренный. Обозначим $x = \angle B_1NM$. Тогда $B_1MK = x - \varepsilon$.

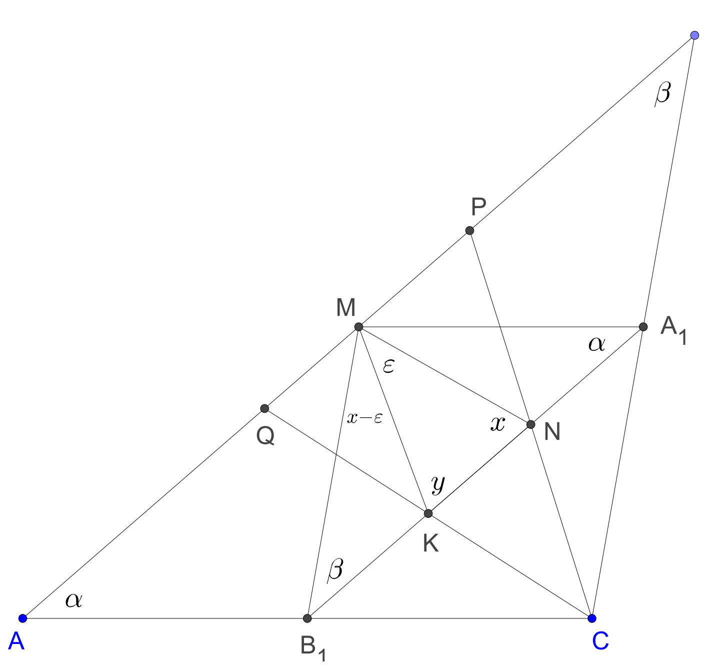

Рис. 1

Обозначим также $y = \angle MKA_1$ — внешний угол для треугольника B_1MK. Поскольку $\angle MB_1A_1 = \beta$, имеем

$$y = \beta + x - \varepsilon.$$

Аналогично получается

$$x = \alpha + y - \varepsilon.$$

Сложим данные равенства: $2\varepsilon = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Отсюда $2\varepsilon + \gamma = 180^\circ$. Это и требовалось доказать.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов.

7. По кругу записано 100 положительных чисел. Сумма любых двух соседних чисел равна квадрату числа, следующего за ними по часовой стрелке. Найдите все такие наборы чисел.

Ответ: сто двоек.

Решение. Пусть M — наибольшее из всех чисел, а перед ним стоят числа a и b. Тогда $a + b = M^2$, $a \leqslant M$, $b \leqslant M$, откуда $M^2 \leqslant 2M$ и $M \leqslant 2$ (учитываем, что $M > 0$).

Пусть m — наименьшее из всех чисел, а перед ним стоят числа c и d. Тогда $c + d = m^2$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$, откуда $m^2 \geqslant 2m$ и $m \geqslant 2$ (поскольку $m > 0$).

Итак, наибольшее число не больше 2, а наименьшее не меньше 2. Значит, все числа равны 2. С другой стороны, для 100 двоек выполнено условие задачи.

Оценивание. За полное решение — 15 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 5 баллов. Если показано, что все числа должны быть равны 2, но не отмечено, что 100 двоек действительно удовлетворяют условию задачи, 13 баллов.