Олимпиада школьников
«Звезда — Таланты на службе обороны и безопасности»
по математике
Отборочный тур
2014–2015
Решения, указания, ответы и критерии оценивания

10 класс

1. Трое пенсионеров в парке на лавочке играют в шахматы, причём игрок, проигравший очередную партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 6 партий, а второй — 13. Сколько партий сыграл третий игрок? (Считать, что вничью партии не заканчиваются).

Ответ: 7.

Решение. Всего партий было не менее 13. В каждой паре соседних партий первй игрок принимал участие; поскольку он сыграл 6 партий, партий было не больше 13. С учётом предыдущего получаем, что партий было ровно 13. В каждой из них играл второй игрок, в шести – первый, в оставшихся семи — третий.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

2. Найдите сумму

$$(2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2).$$

Ответ: 5050.

Решение. Перегруппируем слагаемые:

$$(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\ldots+(100^2-99^2)=$$

$$=3+7+11+\ldots+199=\frac{3+199}{2}\cdot 50=5050.$$

Оценивание. За верное решение — 20 б.

3. Найдите $f(3)$, если известно, что для любого x имеет место равенство

$$f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=\frac{x+3}{x-1}.$$

Ответ: -19.

Решение. Обозначим $t = \dfrac{x+1}{2x-1}$. Тогда $x = \dfrac{t+1}{2t-1}$ и $\dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{7t-2}{-t+2}$. Значит, $f(t) = \dfrac{7t-2}{-t+2}$ и $f(3) = -19$.

Оценивание. За верное решение — 20 б.

4. Решите неравенство $|x^4 - x| + |x^3 - x^2| \leqslant |x^4 - x^3 + x^2 - x|$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

Решение. $|a| + |b| \leqslant |a - b| \iff |ab| \leqslant -ab \iff ab \leqslant 0$. Положив $a = x^4 - x$ и $b = x^3 - x^2$, придём к неравенству $(x^4 - x)(x^3 - x^2) \leqslant 0$, которое решается методом интервалов.

5. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $DOEC$, если площадь треугольника ABC равна 105, а $AC : AB : BC = 4 : 3 : 2$.

Ответ: 32.

Указание. Если разместить в вершинах A, B и C соответственно массы 2, 4 и 3, то их центр масс будет в точке пересечения биссектрис. Отсюда $\frac{AO}{QD} = \frac{7}{2}$. Поэтому $\frac{AO}{AD} = \frac{7}{9}$. Кроме того, $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$. Отсюда $S_{AOE} = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{5} S_{ADC} = \frac{7}{15} S_{ADC}$, а $S_{DOEC} = \frac{8}{15} S_{ADC}$. В свою очередь, $S_{ADC} = \frac{4}{7} S_{ABC}$. Таким образом, $S_{DOEC} = \frac{32}{105} S_{ABC}$.

Оценивание. За верное решение — 20 б.