Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания
9 класс

1. Отец и сын бегают по беговой дорожке стадиона в разные стороны. Отец пробегает круг за 3 минуты, а сын — за 5 минут. Какое время проходит между их встречами?

Ответ: $\frac{15}{8}$ мин.

Решение. За одну минуту отец пробегает $\frac{1}{3}$ длины дорожки, а сын пробегает $\frac{1}{5}$ длины дорожки, поэтому вместе они пробегают $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ длины дорожки. От момента встречи до следующей встречи им нужно как раз пробежать общее расстояние, равное длине дорожки. Поэтому их следующая встреча состоится через $\frac{15}{8}$ мин.

Оценивание. За верное решение — 10 б.

2. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 13 б.

3. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 75.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1+x_2)(y_1z_1+z_1y_2+y_2z_2+z_2y_1) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 2013.$$

Число $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = 3+11+61 = 75.$$

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если найдено равенство $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 2013$, но не найдено разложение числа 2013 на простые множители, 3 б.

4. Решите ребус: АХ $\times$ АХ = БРРР. (Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры. Разные буквы заменяют разные цифры.)

Ответ: $38 \times 38 = 1444$.

Решение. Выясним сначала, каким не может быть число Х. Очевидно, $\text{Х} \neq 0, 1, 5, 6$ (иначе Х = Р). Заметим, что

$$\text{АХ} \times \text{АХ} = (10\text{А} + \text{Х})^2 = 100\text{А}^2 + 20\text{АХ} + \text{Х}^2.$$

При нечётном Х число единиц в данном числе нечётно, а число десятков чётно (при возведении нечётного однозначного числа в квадрат в следующий разряд переносится чётное число), в силу чего последние две цифры будут различными. При Х = 4 последняя цифра квадрата 6, а предпоследняя нечётная (из-за переноса единицы в разряд десятков). Остаются два возможных значения Х: 2 и 8. Тогда Р = 4. Возможные значения А: 3, 5, 6, 7, 8, 9 (при А $<$ 3 число АХ^2 не будет четырёхзначным; кроме того $\text{А} \neq \text{Р} = 4$). Заметим также, что число, оканчивающееся тремя четвёрками, не кратно 8, в силу этого число АХ не должно делиться на 4. Круг возможных значений АХ сузился теперь до шести чисел: 62, 82, 38, 58, 78, 98. Подходит только число 38.

Оценивание. За верное решение — 15 б. Если ответ найден, но никаких обоснований его единственности не приведено, 5 б.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = xyz + 1; \\ (x+2)(y+2)(z+2) = xyz + 2. \end{cases}$$

Ответ: $x = y = z = -1$.

Решение. Систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x + y + z + xy + yz + zx = 0; \\ 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) = -6. \end{cases}$$

Обозначим $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$. Тогда $u + v = 0$ и $4u + 2v = -6$. Из последних двух уравнений находим $u = -3$, $v = 3$. Значит,

$$\begin{cases} x + y + z = -3; \\ xy + yz + zx = 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Эта система имеет очевидное решение $x = y = z = -1$. Докажем, что других решений нет. Действительно,

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 =$$

$$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + 2(x+y+z) + 3 = 9 - 6 - 6 + 3 = 0.$$

Сумма трёх неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю, то есть $x+1 = y+1 = z+1 = 0$.

Оценивание. За верное решение — 16 б. Если ответ угадан, но никаких обоснований его единственности не приведено, 3 б. Если получены равенства $(*)$, 5 б. (а вместе с угаданным ответом 8 б.)

6. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 75°$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

Ответ: $15°$, $135°$, $30°$.

Решение. Пусть точка B_1 получается в результате поворота точки O вокруг точки B на $60°$ (рис. 2).

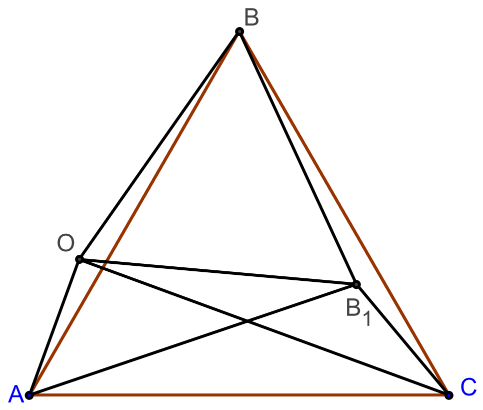

Рис. 2

Точка C получается из A таким же поворотом. Значит, B_1C — результат поворота отрезка OA. Поэтому $B_1C = OA$. В то же время $OB_1 = OB$. Таким образом, длины сторон треугольника OB_1C равны соответственно OB, OC и OA. Углы этого треугольника и нужно найти. Имеем:

$$\angle COB_1 = \angle COB - \angle B_1OB = 75° - 60° = 15°;$$

$$\angle BB_1C = \angle BOA = \angle BOC + \angle COA = 75° + 90° = 165°;$$

$$\angle OB_1C = 360° - (\angle OB_1B + \angle BB_1C) = 135°;$$

$$\angle B_1CO = 180° - (\angle COB_1 + \angle OB_1C) = 30°.$$

Оценивание. За верное решение — 16 б.

7. Назовём натуральное число интересным, если оно удовлетворяет следующим трём условиям: а) оно девятизначное; б) в его записи есть каждая ненулевая цифра; в) оно делится на 11. Найдите:

1) какое-нибудь интересное число;

2) самое маленькое и самое большое интересное число;

3) общее количество интересных чисел.

Ответ: самое маленькое интересное число 123 475 869, самое большое 987 652 413, а всего их $11 \cdot 5! \cdot 4! = 31\,680$.

Решение. Пусть x — сумма цифр 9-значного числа, стоящих на чётных местах, а y — сумма цифр на нечётных местах. По признаку делимости на 11, разность $x - y$ должна быть кратна 11. Поскольку $x + y = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, получаем отсюда, что $x = 17$ или 28 (соответственно, $y = 28$ или 17). Вот все четвёрки и пятёрки попарно различных ненулевых цифр с суммой цифр 17:

$$1, 2, 5, 9; \quad 1, 2, 6, 8; \quad 1, 3, 4, 9; \quad 1, 3, 5, 8; \quad 1, 3, 6, 7; \quad 1, 4, 5, 7;$$

$$2, 3, 4, 8; \quad 2, 3, 5, 7; \quad 2, 4, 5, 6; \quad 1, 2, 3, 4, 7; \quad 1, 2, 3, 5, 6.$$

Цифры из перечисленных четвёрок стоят на чётных местах, а из пятёрок — на нечётных местах. Значит, имеем 11 способов распределить цифры по чётным и нечётным местам. При заданном таком распределении цифры на чётных местах переставляются 4! способами, а на нечётных 5! способами. Поэтому всего интересных чисел $11 \cdot 4! \cdot 5!$. В самом маленьком интересном числе цифры, стоящие на нечётных местах, дожны идти по возрастанию, равно как и цифры на чётных местах. Для самого большого интересного числа всё наоборот. Небольшой перебор позволяет найти ответ.

Оценивание. За полное решение — 16 б. За пример интересного числа 3 б. Если (без обоснований) найдено самое маленькое (или самое большое) интересное число, 4 б., а если и одно, и другое, 5 б. Если найдены структура интересного числа и количество интересных чисел, но ошибки в п. 2, то минус 3 б. за каждую ошибку.