Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

8 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 10 б.

2. Решите ребус: $\text{АХ} \times \text{АХ} = \text{БРРР}$. (Одинаковые буквы заменяют одинаковые цифры. Разные буквы заменяют разные цифры.)

Ответ: $38 \times 38 = 1444$.

Решение. Выясним сначала, каким не может быть число Х. Очевидно, $\text{Х} \neq 0, 1, 5, 6$ (иначе $\text{Х} = \text{Р}$). Заметим, что

$$\text{АХ} \times \text{АХ} = (10\text{А} + \text{Х})^2 = 100\text{А}^2 + 20\text{АХ} + \text{Х}^2.$$

При нечётном Х число единиц в данном числе нечётно, а число десятков чётно (при возведении нечётного однозначного числа в квадрат в следующий разряд переносится чётное число), в силу чего последние две цифры будут различными. При $\text{Х} = 4$ последняя цифра квадрата 6, а предпоследняя нечётная (из-за переноса единицы в разряд десятков). Остаются два возможных значения Х: 2 и 8. Тогда $\text{Р} = 4$. Возможные значения А: 3, 5, 6, 7, 8, 9 (при $\text{А} < 3$ число АХ^2 не будет четырёхзначным; кроме того $\text{А} \neq \text{Р} = 4$). Заметим также, что число, оканчивающееся тремя четвёрками, не кратно 8, в силу этого число АХ не должно делиться на 4. Круг возможных значений АХ сузился теперь до шести чисел: 62, 82, 38, 58, 78, 98. Подходит только число 38.

Оценивание. За верное решение — 15 б. Если ответ найден, но никаких обоснований его единственности не приведено, 5 б.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. Определите, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько.

Ответ: Сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 0 до 999. Возьмём десять чисел, отличающихся лишь последней цифрой. В этом десятке сумма цифр нечётных чисел ровно на пять больше суммы цифр чётных чисел. Всего имеется 100 таких десятков. Поэтому для чисел от 0 до 999 искомая разность равна $5 \cdot 100 = 500$. Осталось 0 убрать, а 1000 добавить, при этом сумма цифр чётных чисел увеличится на 1, а разность сумм цифр станет равной 499.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную?

Решение. На рис. 1 показана последовательность действий (в каждом квадрате выделен прямоугольник, внутри которого осуществлялась перекраска клеток).

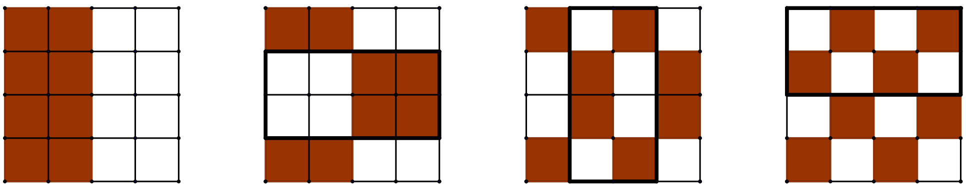

Рис. 1

Оценивание. За верное решение — 15 б.

5. На доске было записано три числа (не обязательно различных). Данил заметил, что если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. А Василий заметил, что если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. Можно ли по этим данным достоверно определить, на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

Ответ: можно; произведение увеличится на 9.

Решение. Пусть исходные числа x, y и z. По условию,

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = xyz + 1; \\ (x+2)(y+2)(z+2) = xyz + 2. \end{cases}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} x + y + z + xy + yz + zx = 0; \\ 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) = -6. \end{cases}$$

Обозначим $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$. Требуется найти

$$(x + 3)(y + 3)(z + 3) - xyz = 9(x + y + z) + 3(xy + yz + zx) + 27 =$$

$$= 9a + 3b + 27,$$

если $a + b = 0$ и $4a + 2b = -6$. Из последних двух уравнений находим $a = -3$, $b = 3$. Значит, $9a + 3b + 27 = 9$.

Замечание. Можно доказать, что $x = y = z = -1$.

Оценивание. За верное решение — 15 б. Если высказано (но не доказано) предположение, что $x = y = z = -1$, 3 б.

6. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $60°$. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: 4.

Решение. Лучи PO и NO (рис. 2) разбивают квадрат $ABCD$ на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90°$).

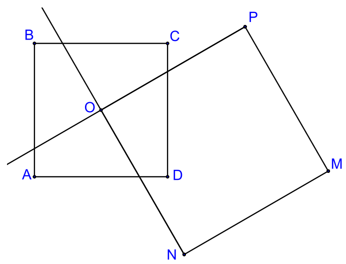

Рис. 2

Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата $ABCD$.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны двух квадратов.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

7. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 75°$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

Ответ: $15°$, $135°$, $30°$.

Решение. Пусть точка B_1 получается в результате поворота точки O вокруг точки B на $60°$ (рис. 3).

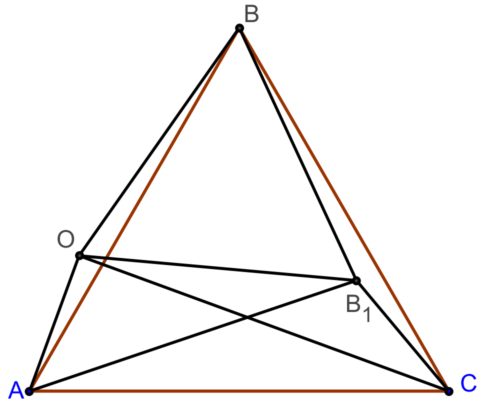

Рис. 3

Точка C получается из A таким же поворотом. Значит, B_1C — результат поворота отрезка OA. Поэтому $B_1C = OA$. В то же время $OB_1 = OB$. Таким образом, длины сторон треугольника OB_1C равны соответственно OB, OC и OA. Углы этого треугольника и нужно найти. Имеем:

$$\angle COB_1 = \angle COB - \angle B_1OB = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ;$$

$$\angle BB_1C = \angle BOA = \angle BOC + \angle COA = 75^\circ + 90^\circ = 165^\circ;$$

$$\angle OB_1C = 360^\circ - (\angle OB_1B + \angle BB_1C) = 135^\circ;$$

$$\angle B_1CO = 180^\circ - (\angle COB_1 + \angle OB_1C) = 30^\circ.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.