Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

7 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 12 б.

2. На сторонах квадрата записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на сторонах, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 323. Найдите сумму чисел на сторонах квадрата.

Ответ: 36.

Решение. Пусть на одной паре противоположных сторон записаны числа a и c, а на другой b и d. Тогда сумма произведений равна

$$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 323.$$

Число $323 = 17 \cdot 19$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение двух натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(a + c) + (b + d) = 17 + 19 = 36.$$

Оценивание. За верное решение — 16 б. Если найдено равенство $(a + c)(b + d) = 323$, но не найдено разложение числа 323 на простые множители, 6 б.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. Определите, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько.

Ответ: сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 0 до 999. Возьмём десять чисел, отличающихся лишь последней цифрой. В этом десятке сумма цифр нечётных чисел ровно на пять больше суммы цифр чётных чисел. Всего имеется 100 таких десятков. Поэтому для чисел от 0 до 999 искомая разность равна $5 \cdot 100 = 500$. Осталось 0 убрать, а 1000 добавить, при этом сумма цифр чётных чисел увеличится на 1, а разность сумм цифр станет равной 499.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную?

Решение. На рис. 1 показана последовательность действий (в каждом квадрате выделен прямоугольник, внутри которого осуществлялась перекраска клеток).

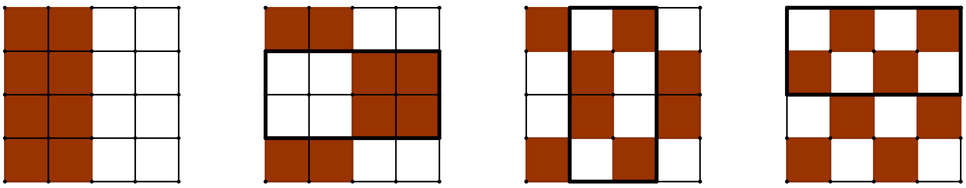

Рис. 1

Оценивание. За верное решение — 18 б.

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $60°$. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: 4.

Решение. Лучи PO и NO (рис. 2) разбивают квадрат $ABCD$ на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90°$).

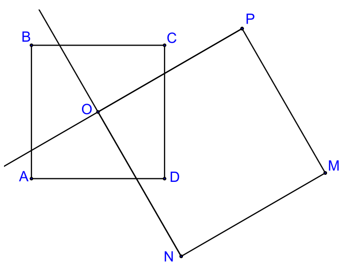

Рис. 2

Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата $ABCD$.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны двух квадратов.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на несколько прямоугольников. Один из них отложили, а из всех остальных составили прямоугольник с периметром 234. Каковы размеры отложенного прямоугольника?

Ответ: 13×16.

Решение. Пусть отложен прямоугольник размером $c \times d$, где $c \leqslant d \leqslant 18$, а составлен прямоугольник размером $a \times b$, где $a \leqslant b$ (a, b, c, d — натуральные числа).

Имеем $a + b = 117$. Известно, что при сближении двух чисел с фиксированной суммой их произведение увеличивается (доказательство этого факта от 7-классников не требуется, достаточно его упоминания). Поэтому при $3 \leqslant a \leqslant b$ площадь $ab \geqslant 3 \cdot 114 = 342$, что невозможно. Значит, $a = 1$ или $a = 2$.

Если $a = 1$, то $b = 116$, а площадь отложенного прямоугольника равна $cd = 324 - 116 = 208$. Небольшой перебор по делителям числа 208 показывает, что выписанным условиям удовлетворяют только числа $c = 13$ и $d = 16$.

Если $a = 2$, то $b = 115$, а площадь отложенного прямоугольника равна $cd = 324 - 230 = 94$. Отсюда число d (больший из двух делителей числа 94) кратно 47, что невозможно при $d \leqslant 18$.

Оценивание. За полное решение — 18 б. Если ответ найден, но никаких обоснований его единственности не приведено, 5 б.