Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

6 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 14 б.

2. Отец и сын бегают по беговой дорожке стадиона в разные стороны. Отец пробегает круг за 3 минуты, а сын — за 5 минут. Какое время проходит между их встречами?

Ответ: $\frac{15}{8}$ мин.

Решение. За одну минуту отец пробегает $\frac{1}{3}$ длины дорожки, а сын пробегает $\frac{1}{5}$ длины дорожки, поэтому вместе они пробегают $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ длины дорожки. От момента встречи до следующей встречи им нужно как раз пробежать общее расстояние, равное длине дорожки. Поэтому их следующая встреча состоится через $\frac{15}{8}$ мин.

Оценивание. За верное решение — 14 б.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 разбиты на две группы: чётных чисел и нечётных. Определите, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и насколько.

Ответ: сумма цифр нечётных чисел больше на 499.

Решение. Рассмотрим сначала числа от 0 до 999. Возьмём десять чисел, отличающихся лишь последней цифрой. В этом десятке сумма цифр нечётных чисел ровно на пять больше суммы цифр чётных чисел. Всего имеется 100 таких десятков. Поэтому для чисел от 0 до 999 искомая разность равна $5 \cdot 100 = 500$. Осталось 0 убрать, а 1000 добавить, при этом сумма цифр чётных чисел увеличится на 1, а разность сумм цифр станет равной 499.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

4. В квадрате 4×4 клетки левой половины покрашены в чёрный цвет, а остальные в белый. За одну операцию разрешается перекрасить в противоположный цвет все клетки внутри любого прямоугольника. Как за три операции из первоначальной раскраски получить шахматную?

Решение. На рис. 1 показана последовательность действий (в каждом квадрате выделен прямоугольник, внутри которого осуществлялась перекраска клеток).

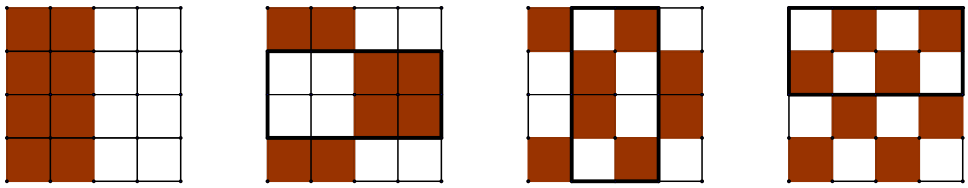

Рис. 1

Оценивание. За верное решение — 18 б.

5. На плоскости расположены два квадрата $ABCD$ и $MNOP$. Известно, что $AB = 4$, $MN = 5$, точка O — центр квадрата $ABCD$, а отрезки OP и DC пересекаются под углом $60°$. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: 4.

Решение. Лучи PO и NO (рис. 2) разбивают квадрат $ABCD$ на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на $90°$).

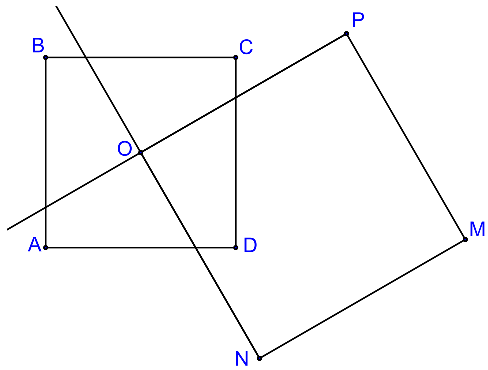

Рис. 2

Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата $ABCD$.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны двух квадратов.

Оценивание. За верное решение — 18 б.

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на несколько прямоугольников. Один из них отложили, а из всех остальных составили квадрат 10×10. Каковы размеры отложенного прямоугольника?

Ответ: 14×16.

Решение. Пусть отложен прямоугольник размером $a \times b$, где $a \leqslant b$ — натуральные числа. Тогда $ab = 18^2 - 10^2 = 224$, и при этом $b \leqslant 18$. Небольшой перебор по делителям числа 224 показывает, что выписанным условиям удовлетворяют только числа $a = 14$ и $b = 16$.

Оценивание. За верное решение — 18 б. Если найдена только площадь прямоугольника, но не найдены его размеры, 4 б.