Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

11 класс

1. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 75.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1+x_2)(y_1z_1+z_1y_2+y_2z_2+z_2y_1) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 2013.$$

Число $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = 3+11+61 = 75.$$

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если найдено равенство $(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2) = 2013$, но не найдено разложение числа 2013 на простые множители, 3 б.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(\pi x) = \sqrt{x-y}; \\ 6y^2+7y+1 = \sqrt{x-y-1}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$, $y = -1$.

Решение. Область допустимых значений переменных описывается неравенством $x - y \geqslant 1$. Из первого уравнения системы имеем $\sqrt{x-y} = \cos^2(\pi x) \leqslant 1$, откуда $x - y \leqslant 1$. Значит, $x - y = 1$. Тогда $\cos^2(\pi x) = 1$, $x = k \in \mathbb{Z}$, $y = k-1 \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение системы принимает вид $6y^2+7y+1 = 0$. Здесь только один целый корень $y = -1$, при этом $x = 0$.

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если ответ угадан, но решение отсутствует, 2 б. Если только доказано, что $x - y = 1$, 3 б.

3. Решите неравенство $\dfrac{2^{\operatorname{arcctg}(x^3+x)} - 2^{\operatorname{arcctg}(2x^2)}}{\operatorname{arctg}(2^{x^2}) - \operatorname{arctg}(2^{x+2})} \leqslant 0.$

Ответ: $(-1;0] \cup (2;+\infty) \cup \{1\}$.

Решение. С помощью функций $f(x) = 2^{\operatorname{arcctg}(x)}$ и $g(x) = \operatorname{arctg}(2^x)$ решаемое неравенство можно записать так:

$$\frac{f(x^3+x) - f(2x^2)}{g(x^2) - g(x+2)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Заметим, что $f(x)$ — убывающая функция (как композиция убывающей функции $y = \operatorname{arcctg} x$ и возрастающей функции $y = 2^x$). Поэтому для любых a и b знак разности значений функции $f(a) - f(b)$ противоположен знаку разности аргументов $a - b$. В свою очередь, $g(x)$ — возрастающая функция (как композиция возрастающих функций $y = 2^x$ и $y = \operatorname{arctg} x$), и для любых a и b знак разности значений функции $g(a) - g(b)$ совпадает со знаком разности аргументов $a - b$. Поэтому, если в неравенстве (1) разности значений функций f и g заменить разностями их аргументов, то знак левой части неравенства поменяется, и оно примет вид

$$\frac{(x^3+x) - 2x^2}{x^2 - (x+2)} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Поскольку функции f и g определены на всей числовой прямой, при таком переходе область допустимых значений переменной x не изменилась, и неравенства (1) и (2) равносильны. Неравенство (2) преобразуется к виду $\frac{x(x-1)^2}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$, после чего решается методом интервалов.

Оценивание. За верное решение — 14 б. За потерю решения $x = 1$ минус 3 б.

4. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны. Медианы граней, проведённые из вершины D, равны 13, 14 и 15. Найдите:

1) площадь основания ABC;
2) объём пирамиды $ABCD$;
3) радиус сферы, описанной вокруг $ABCD$.

Ответ: 1) 336; 2) $168\sqrt{55}$; 3) $\sqrt{295}$.

Решение. 1) В прямоугольном треугольнике гипотенуза вдвое больше медианы, проведённой из вершины прямого угла, поэтому $AB = 26$, $BC = 28$, $CA = 30$. Площадь треугольника ABC находим по формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 4\sqrt{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2} = 7 \cdot 3 \cdot 16 = 336.$$

2) Пусть $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$. По теореме Пифагора,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 26^2 = 4 \cdot 169; \\ b^2 + c^2 = 28^2 = 4 \cdot 196; \\ c^2 + a^2 = 30^2 = 4 \cdot 225. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $c = 2\sqrt{126}$, $a = 2\sqrt{99}$, $b = 2\sqrt{70}$. Из взаимной перпендикулярности рёбер DA, DB и DC следует, что

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc = \frac{4}{3}\sqrt{9 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 14} = 168\sqrt{55}.$$

3) Пирамиду $DABC$ можно достроить до прямоугольного параллелепипеда с попарно перпендикулярными рёбрами длиной a, b и c. Сфера, описанная вокруг параллелепипеда, будет описана и вокруг пирамиды. Диагональ параллелепипеда — диаметр сферы, поэтому искомый радиус — это половина диагонали:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{295}.$$

Оценивание. За полное решение — 14 б. За отдельные пункты: п. 1 — 4 б., п. 2 — 5 б., п. 3 — 5 б.

5. Докажите, что в десятичной записи числа $B = 2^{697}$ какая-то цифра встретится не менее 22 раз.

Доказательство. Сначала оценим количество цифр в десятичной записи числа B.

$$2^{697} = (2^{10})^{69} \cdot 2^7 > 10^{3 \cdot 69} \cdot 128 > 10^{209}.$$

10^{209} — самое маленькое 210-значное число. Поэтому в записи числа B не менее 210 цифр (на самом деле, их ровно 210, но установить это без помощи калькулятора довольно затруднительно, и в дальнейшем на данный факт мы не опираемся!). Доказывая утверждение задачи рассуждением от противного, предположим, что каждая из десяти цифр встречается не более 21 раза. Тогда всего цифр не более 210. Если в записи числа B более 210 цифр, то противоречие уже получено. Если же цифр ровно 210, то каждая из них должна встретиться по 21 разу. Но тогда общая сумма цифр числа B равна $21(0+1+2+\ldots+9)$ и кратна 3. По признаку делимости на 3, и число B должно делиться на 3, что неверно. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Оценивание. За полное решение — 14 б. Если показано, что цифр не менее 210, 5 б. Если к тому же рассмотрен случай, когда цифр больше 210, ещё 3 б.

6. Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\ldots+\sqrt{n^2+2n}$.

Ответ: $2n^2+n$.

Решение. Преобразуем сумму корней:

$$S=\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{n^2+k}=\sum_{k=1}^{2n}(n+(\sqrt{n^2+k}-n))=2n^2+\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}.$$

Обозначим $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}$ и оценим эту величину. С одной стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}<\dfrac{k}{2n}$. Отсюда

$$\Delta<\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n=n+\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}>\dfrac{k}{\sqrt{n^2+2n+1}+n}=\dfrac{k}{2n+1}$ и

$$\Delta>\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}k=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n=n.$$

Таким образом, $n<\Delta<n+\frac{1}{2}$ и целая часть числа Δ равна n. Теперь осталось учесть, что $S=2n^2+\Delta$.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

7. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x*y=\frac{3x+2y}{xy+6}$. Найдите значение выражения

$$C=(\ldots((2014*2013)*2012)*\ldots*2)*1.$$

Ответ: $\dfrac{37}{55}$.

Решение. Заметим, что при любом числе $x\neq-2$ выполнено равенство $x*3=1$. Поэтому

$$C=(1*2)*1=\frac{7}{8}*1=\frac{\frac{21}{8}+2}{\frac{7}{8}+6}=\frac{37}{55}.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.

Олимпиада «Звезда» - Таланты на службе обороны и безопасности»
Математика
2014

03 апреля 2014 года

ПРОТОКОЛ № 1
заседания жюри
олимпиады «Звезда» - Таланты на службе обороны и безопасности» по математике

ПРИСУТСТВОВАЛИ: д.ф.-м.н., доц. Келлер А.В., д.ф.-м.н., проф. Менихес Л.Д., к.ф.-м.н., проф. Заляпин В.И.

СЛУШАЛИ: о распределении баллов победителей и призеров олимпиады

ПОСТАНОВИЛИ:
11класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 - 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 40 баллов.
10класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 40 баллов.
9 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 40 баллов.
8 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 35 баллов.
7 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 - 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 35 баллов.

6 **класс**

− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 - 90 баллов;

− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 65 баллов;

− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 35 баллов.

Председатель жюри А.В. Келлер