Олимпиада «Звезда»

9 марта 2014 г.

Решения и критерии оценивания

10 класс

1. Цена билета в бассейн была 300 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снизили цену билета?

Ответ: на 50 рублей.

Решение. Пусть n — первоначальное число посетителей, а x — новая цена билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет $1{,}5n$, а сбор денег составит $1{,}5nx$. Первоначально денег собрали $300n$, а сбор увеличился на 25%, отсюда получаем уравнение $1{,}5xn - 300n = 0{,}25 \cdot 300n$, из которого $x = 250$. Следовательно, цену снизили на 50 руб.

Оценивание. За верное решение — 13 б.

2. На гранях куба записаны натуральные числа. Саша для каждой вершины подсчитал произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений равна 2013. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 75.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$x_1x_2(y_1z_1 + z_1y_2 + y_2z_2 + z_2y_1) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 2013.$$

Число $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 3 + 11 + 61 = 75.$$

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если найдено равенство $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 2013$, но не найдено разложение числа 2013 на простые множители, 3 б.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(\pi x) = \sqrt{x-y}; \\ 6y^2 + 7y + 1 = \sqrt{x-y-1}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$, $y = -1$.

Решение. Область допустимых значений переменных описывается неравенством $x - y \geqslant 1$. Из первого уравнения системы имеем $\sqrt{x-y} = \cos^2(\pi x) \leqslant 1$, откуда $x - y \leqslant 1$. Значит, $x - y = 1$. Тогда $\cos^2(\pi x) = 1$, $x = k \in \mathbb{Z}$, $y = k - 1 \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение системы принимает вид $6y^2 + 7y + 1 = 0$. Здесь только один целый корень $y = -1$, при этом $x = 0$.

Оценивание. За верное решение — 14 б. Если ответ угадан, но решение отсутствует, 2 б. Если только доказано, что $x - y = 1$, 3 б.

4. Решите неравенство $\dfrac{(x^3+x)^3 - 8x^6}{32x^{10} - (x+2)^5} \geqslant 0$.

Ответ: $(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 0] \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{4}; +\infty) \cup \{1\}$.

Решение. С помощью функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^5$ решаемое неравенство можно записать так:

$$\frac{f(x^3+x) - f(2x^2)}{g(2x^2) - g(x+2)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Заметим, что $f(x)$ — возрастающая функция. Поэтому для любых a и b знак разности значений функции $f(a) - f(b)$ совпадает со знаком разности аргументов $a - b$. Аналогичное утверждение справедливо по отношению к функции $g(x)$. Поэтому в неравенстве (1) разности значений функций f и g можно заменить разностями их аргументов:

$$\frac{(x^3+x) - 2x^2}{2x^2 - (x+2)} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Поскольку функции f и g определены на всей числовой прямой, при таком переходе область допустимых значений переменной x не изменилась, и неравенства (1) и (2) равносильны. Неравенство (2) преобразуется к виду $\frac{x(x-1)^2}{2x^2-x-2} \geqslant 0$, после чего решается методом интервалов.

Оценивание. За верное решение — 14 б. За потерю решения $x = 1$ минус 3 б.

5. В плоскости правильного треугольника ABC выбрана точка O так, что $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 75^\circ$. Найдите углы треугольника, который можно составить из отрезков AO, BO и CO.

Ответ: 15°, 135°, 30°.

Решение. Пусть точка B_1 получается в результате поворота точки O вокруг точки B на 60° (рис. 2).

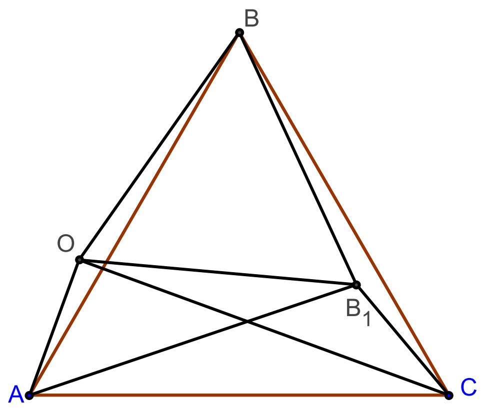

Рис. 2

Точка C получается из A таким же поворотом. Значит, B_1C — результат поворота отрезка OA. Поэтому $B_1C = OA$. В то же время $OB_1 = OB$. Таким образом, длины сторон треугольника OB_1C равны соответственно OB, OC и OA. Углы этого треугольника и нужно найти. Имеем:

$$\angle COB_1 = \angle COB - \angle B_1OB = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ;$$

$$\angle BB_1C = \angle BOA = \angle BOC + \angle COA = 75^\circ + 90^\circ = 165^\circ;$$

$$\angle OB_1C = 360^\circ - (\angle OB_1B + \angle BB_1C) = 135^\circ;$$

$$\angle B_1CO = 180^\circ - (\angle COB_1 + \angle OB_1C) = 30^\circ.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.

6. Пусть n — натуральное число. Найдите целую часть суммы $2n$ слагаемых $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \ldots + \sqrt{n^2+2n}$.

Ответ: $2n^2 + n$.

Решение. Преобразуем сумму корней:

$$S = \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{n^2+k} = \sum_{k=1}^{2n} (n + (\sqrt{n^2+k} - n)) = 2n^2 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}.$$

Обозначим $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n}$ и оценим эту величину. С одной стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} < \dfrac{k}{2n}$. Отсюда

$$\Delta < \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1+2n}{2} \cdot 2n = n + \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} > \dfrac{k}{\sqrt{n^2+2n+1}+n} = \dfrac{k}{2n+1}$ и

$$\Delta > \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n = n.$$

Таким образом, $n < \Delta < n + \frac{1}{2}$ и целая часть числа Δ равна n. Теперь осталось учесть, что $S = 2n^2 + \Delta$.

Оценивание. За верное решение — 15 б.

7. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x * y = \frac{2x+y}{xy+2}$. Найдите значение выражения

$$(\ldots((2014 * 2013) * 2012) * \ldots * 2) * 1.$$

Ответ: 1

Решение. Заметим, что при любом числе $x \neq -1$ выполнено равенство $x * 2 = 1$. Поэтому

$$C = 1 * 1 = \frac{2+1}{1+2} = 1.$$

Оценивание. За верное решение — 15 б.