

**Южно-Уральская олимпиада школьников
по математике**

10 класс (решения и критерии оценивания)

24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}.$$

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y + x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b, b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c, 11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

5. Известно, что $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ — ненулевые числа, причём

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{999} - x_{1000}| + |x_{1000} - x_1| = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $S = x_1 + x_2 + \dots + x_{1000}$.

6. Докажите, что в треугольнике ABC угол ABC вдвое больше угла CAB тогда и только тогда, когда

$$BC^2 + BC \cdot AB = AC^2.$$

7. Точка M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$. На отрезке MD выбрана точка O . Лучи AO, BO, CO пересекают боковые грани пирамиды в точках A_1, B_1, C_1 . Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию пирамиды.