Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

8-9 классы (решения и критерии оценивания)

24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

Ответ: 25 м.

Решение. В тот момент, когда первая машина достигла столба со знаком ограничения скорости, вторая машина находилась в 45 м от него. Пока вторая машина едет к столбу, первая удаляется от него со скоростью, составляющей 5/9 от скорости первой машины. Поэтому к моменту достижения 2-й машиной столба, первая удалится от него на расстояние $45 \cdot 5/9 = 25$ метров.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если ход решения правильный, но из-за арифметических ошибок, связанных с переходом от км/ч в м/с, ответ неверен, ставится 4 балла. Если ход решения верный и ответ верный, но в выкладках есть арифметические ошибки, компенсирующие друг друга, ставится 8 баллов.

2. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y+x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a < 0$ и $a = 1$.

Решение. Построим график первого уравнения. При $y \geqslant -x$ после раскрытия модуля получаем $x = 1$. При $y \leqslant -x$ имеем $y = -1$. Значит, графиком является ломаная с вершиной в точке $A(1; -1)$ со звеньями, параллельными осям координат (рис. 1). Графиком второго уравнения является прямая, проходящая через точку $B(0; -2)$ и имеющая угловой коэффициент a.

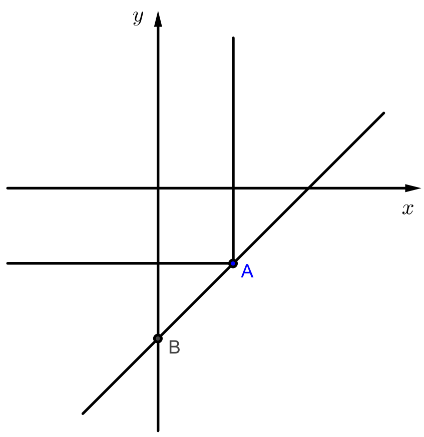

Рис. 1

Нужно выбрать a так, чтобы прямая и ломаная имели ровно одну общую точку. Так будет только в том случае, когда прямая образует тупой угол с осью Ox (т. е. $a < 0$) или когда прямая пройдёт через вершину ломаной (при этом $a = 1$).

Оценивание. За верное решение 15 баллов. Если (обоснованно) найдено только значение $a = 1$, за это 5 баллов.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \sqrt{x - 1}.$$

Ответ: 1.

Решение. Решая систему неравенств $x^2 - x \geqslant 0, 4 - 3x - x^2 \geqslant 0, x - 1 \geqslant 0$, находим, что ОДЗ состоит из одной точки $x = 1$. Подстановка подтверждает, что 1 — корень уравнения.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдена ОДЗ, но проверки того, что 1 — корень, не сделано, 9 баллов. Если корень угадан, но не доказано, что нет других корней, 3 балла.

4. Равносторонний треугольник со стороной 5 разделили на 25 равных треугольников отрезками, параллельными его сторонам (рис. 2).

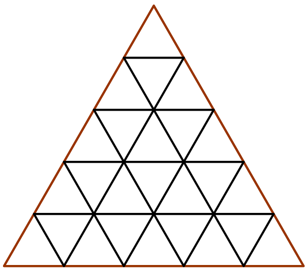

Рис. 2

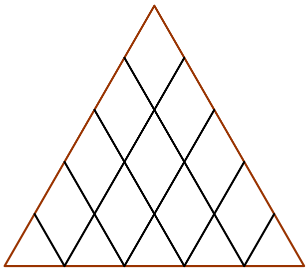

Рис. 3

Какое наибольшее число ромбов со стороной 1 можно вырезать по линиям получившейся сетки?

Ответ: 10.

Решение. Среди 25 треугольников разбиения 15 направлены вверх, а 10 вниз. В любом ромбе по одному треугольнику каждого вида. Поэтому больше 10 ромбов вырезать не удастся. (То же рассуждение можно провести с использованием шахматной раскраски треугольников). Пример, как можно вырезать 10 ромбов, приведён на рис. 3.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. За правильный пример (без обоснования максимальности) 5 баллов. Если получена оценка, но не приведён пример, 10 баллов. Если есть пример, но неполное обоснование максиммальности, то баллы снижаются в зависимости от неполноты обоснований.

5. $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, в котором все стороны равны и $\angle A = \angle C = 108°$. Докажите, что $ABCDE$ — правильный пятиугольник.

Доказательство. Пусть $A'B'C'D'E'$ — правильный пятиугольник с такой же длиной стороны, что и у исходного пятиугольника. Проведём в пятиугольниках диагонали из вершин B и B'.

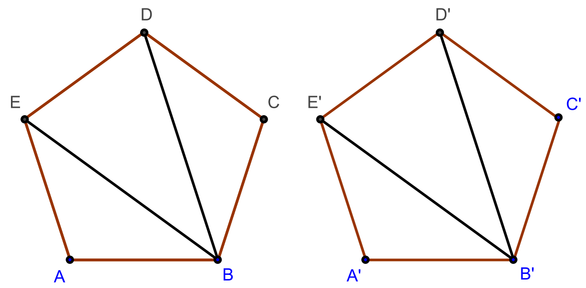

Рис. 4

Имеем равенство треугольников BAE и $B'A'E'$, BCD и $B'C'D'$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $BE = B'E'$ и $BD = B'D'$. Поэтому равны треугольники EBD и $E'B'D'$ (по трём сторонам). Отсюда следует, что пятиугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ можно совместить наложением. Значит, это равные фигуры.

Другой вариант завершения доказательства — подсчёт углов. Например,

$$\angle B = \angle ABE + \angle EBD + \angle DBC = \angle A'B'E' + \angle E'B'D' + \angle D'B'C' = \angle B' = 108^\circ.$$

Оценивание. За верное решение 15 баллов.

6. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2013^2 = 4\,052\,169$.

Решение.

Первый способ. $ab \,\vdots\, 3c$, $bc \,\vdots\, 11a \Rightarrow ab^2c \,\vdots\, 33ac \Rightarrow b^2 \,\vdots\, 33$. Если квадрат целого числа n делится на простое число p, то и само число n делится на p (иначе его квадрат не был бы кратен p). Поскольку b^2 делится и на 3, и на 11, верно, что тем же свойством обладает и число b. Значит, b делится и на 33.

Аналогично получаем, что $c \,\vdots\, 11 \cdot 61$, $a \,\vdots\, 3 \cdot 61$. Значит, $abc \,\vdots\, 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 3 \cdot 61 = (3 \cdot 11 \cdot 61)^2 = 2013^2 = 4052169$.

Поэтому $abc \geqslant 2013^2$. Равенство здесь достигается при $a = 3 \cdot 61$, $b = 3 \cdot 11$, $c = 11 \cdot 61$.

Второй способ. Среди делителей чисел a, b и c встречаются 3, 11 и 61. При этом каждый из этих простых делителей встречается не менее двух раз. Действительно, из условия $ab \,\vdots\, 3c$ следует, что хотя бы одно из чисел a или b делится на 3. Пусть это, к примеру, число a. Но bc кратно a. Значит, b или c делится на 3. Аналогичные рассуждения для 11 и 61. Поэтому $abc \,\vdots\, (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$. Окончание решения такое же, как в 1-м способе.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. За правильный ответ (без обоснования минимальности) 5 баллов. Если получена лишь оценка $abc \geqslant 3 \cdot 11 \cdot 61$, за это 3 балла. Если получена оценка $abc \geqslant (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$, но не приведён пример, 10 баллов. Если есть пример, но неполное обоснование минимальности, то баллы снижаются в зависимости от неполноты обоснований.

7. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезке BM выбрана точка O. Лучи AO и CO пересекают стороны BC и AB в точках A_1 и C_1. Докажите, что прямая A_1C_1 параллельна прямой AC.

Решение.

Первый способ. [Дополнительные построения и подобие трегольников] Возьмём на сторонах AB и CB точки N и K такие, что $MN \parallel CC_1$ и $MK \parallel AA_1$. Это средние линии в треугольниках ACC_1 и ACA_1. Поэтому $AN = NC_1$, $CK = KA_1$.

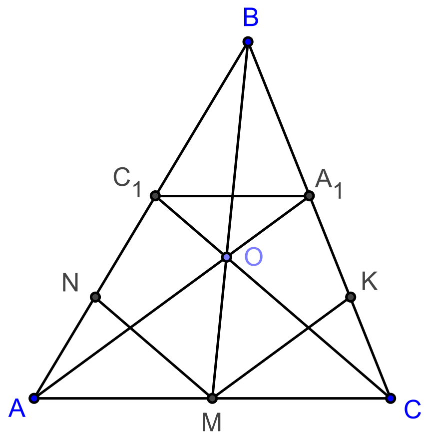

Рис. 5

Пусть $BO : OM = x : y$. Из подобия треугольников NBM и C_1BO (их стороны попарно параллельны) $BC_1 : C_1N = x : y$. С учётом равенства $AN = NC_1$ получаем $BC_1 : BA = x : (x + 2y)$. Аналогичные рассуждения приводят к пропорции $BA_1 : BC = x : (x + 2y)$. Значит, у треугольников C_1BA_1 и ABC стороны, прилежащие к общему углу, пропорциональны — $BC_1 : BA = BA_1 : BC$. Отсюда следует их подобие и параллельность сторон C_1A_1 и BC.

Второй способ. [Метод масс] Разместим в вершинах треугольника ABC такие массы, чтобы их центр масс был в точке O. При этом центр масс в точках A и C должен быть в точке M — середине AB. Поэтому в этих вершинах должны быть равные массы, возьмём их единичными. Пусть масса в точке B равна m. Если группировать массы в точках A и B, то их центр масс должен быть в точке C_1. Отсюда $BC_1 : C_1A = 1 : m$. Аналогично, $BA_1 : A_1C = 1 : m$. Окончание доказательства такое же, как в 1-м способе решения.

Оценивание. За верное решение 15 баллов.