Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

6-7 классы (решения и критерии оценивания)

24 марта 2013 г.

1. Каждый из учеников класса увлекается футболом или танцами (есть те, кто увлекается и футболом, и танцами). Оказалось, что как у поклонников футбола, так и у поклонников танцев средний балл по физкультуре больше 4. Может ли средний балл по физкультуре у учеников всего класса быть меньше 4?

Ответ: Да. Например, пусть в классе 10 поклонников футбола и танцев, и все они имеют по физкультуре 5, а поклонников только футбола и только танцев — по 7 человек, и по физкультуре у них 3. Тогда общий средний балл будет меньше 4, хотя среди поклонников футбола и танцев, взятых по отдельности, он будет больше 4.

Оценивание. За верный пример 14 баллов. За ответ без обоснования — 0 баллов.

2. Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них всегда лжёт, а второй может быть и правдивым, и лживым (по настроению). Знайка спросил одного из них: «Ты — Винтик?» Услышав ответ «да», Знайка задал тот же вопрос другому брату. По его ответу Знайка смог определить, кто есть кто. Кто же оказался Винтиком — первый или второй брат?

Ответ: второй брат.

Решение. Если бы второй брат, как и первый, ответил «да», Знайка не смог бы различить братьев. Значит, второй ответил «нет». Если бы первый брат был Винтиком, то правду сказали бы оба, что, по условию задачи, невозможно. Значит, Винтик — второй брат, а солгали оба, что, опять же по условию задачи, допускается.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. Если лишь указывается, что прозвучали разные ответы, ставится 4 балла.

3. У крестьянина были коза, корова и кобыла, и ещё стог сена. Сын крестьянина подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{3}$ месяца. Может ли отец, если он силён в математике, согласиться с подсчётами сына?

Ответ: не может.

Решение. Пусть x, y и z — те части стога сена, которые съедают за месяц коза, кобыла и корова соответственно. Тогда, согласно условию задачи, $x+y=1$, $x+z=\frac{4}{3}$, $y+z=3$. Но тогда $y+z>(x+y)+(x+z)$, что невозможно при положительном x.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. За ответ без обоснования — 0 баллов.

4. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

Ответ: 25 м.

Решение. В тот момент, когда первая машина достигла столба со знаком ограничения скорости, вторая машина находилась в 45 м от него. Пока вторая машина едет к столбу, первая удаляется от него со скоростью, составляющей 5/9 от скорости первой машины. Поэтому к моменту достижения 2-й машиной столба, первая удалится от него на расстояние $45 \cdot 5/9 = 25$ метров.

Оценивание. За полное решение 14 баллов. Если ход решения правильный, но из-за арифметических ошибок, связанных с переходом от км/ч в м/с, ответ неверен, ставится 4 балла. Если ход решения верный и ответ верный, но в выкладках есть арифметические ошибки, компенсирующие друг друга, ставится 8 баллов.

5. Сколько существует натуральных чисел n, для которых из неравенств $n > 10$, $n > 20$, $n > 30$, $n < 40$, $n < 50$, $n < 60$ не выполняется только одно?

Ответ: 20.

Решение. Если неверно, что $n > 20$, то не будет выполняться и неравенство $n > 30$, но два неравенства одновременно не могут нарушаться. Значит, $n > 20$.

Если неверно, что $n < 50$, то не будет выполняться и неравенство $n < 40$. Поэтому $n < 50$.

Для $n = 21, 22, \ldots, 30$ не выполнено только неравенство $n > 30$.

Для $n = 31, 32, \ldots, 39$ выполнены все неравенства.

Для $n = 40, 42, \ldots, 49$ не выполнено только неравенство $n < 40$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют числа 21, 22,..., 30, 40, 41, ..., 49, и только они — всего 20 чисел.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если найдены все числа, удовлетворяющие условию задачи, но не доказано, что других чисел с таким свойством нет, ставьте 8 баллов.

6. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2013^2 = 4\,052\,169$.

Решение.

Первое решение. $ab \,\vdots\, 3c$, $bc \,\vdots\, 11a \Rightarrow ab^2c \,\vdots\, 33ac \Rightarrow b^2 \,\vdots\, 33$. Если квадрат целого числа n делится на простое число p, то и само число n делится на p (иначе его квадрат не был бы кратен p). Поскольку b^2 делится и на 3, и на 11, верно, что тем же свойством обладает и число b. Значит, b делится и на 33.

Аналогично получаем, что $c \,\vdots\, 11 \cdot 61$, $a \,\vdots\, 3 \cdot 61$. Значит,

$$abc \,\vdots\, 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 3 \cdot 61 = (3 \cdot 11 \cdot 61)^2 = 2013^2 = 4052169.$$

Поэтому $abc \geqslant 2013^2$. Равенство здесь достигается при $a = 3 \cdot 61$, $b = 3 \cdot 11$, $c = 11 \cdot 61$.

Второе решение. Среди делителей чисел a, b и c встречаются 3, 11 и 61. При этом каждый из этих простых делителей встречается не менее двух раз. Действительно, из условия $ab \,\vdots\, 3c$ следует, что хотя бы одно из чисел a или b делится на 3. Пусть это, к примеру, число a. Но bc кратно a. Значит, b или c делится на 3. Аналогичные рассуждения для 11 и 61. Поэтому $abc \,\vdots\, (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$. Окончание решения такое же, как в 1-м способе.

Третье решение. Из условия вытекает, что число abc делится на $3c^2$, $11a^2$, $61b^2$. Стало быть, если p — простой делитель чисел a, b или c (а других простых делителей у abc нет), то число abc делится на p^2. С другой стороны, у abc есть делители 3, 11 и 61. Окончание решения такое же, как в предыдущих способах.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. За правильный ответ (без обоснования минимальности) 5 баллов. Если получена лишь оценка $abc \geqslant 3 \cdot 11 \cdot 61$, за это 3 балла. Если получена оценка $abc \geqslant (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$, но не приведён пример, 10 баллов. Если есть пример, но неполное обоснование минимальности, то баллы снижаются в зависимости от неполноты обоснований.

7. Равносторонний треугольник со стороной 5 разделили на 25 равных треугольников отрезками, параллельными его сторонам (рис. 1).

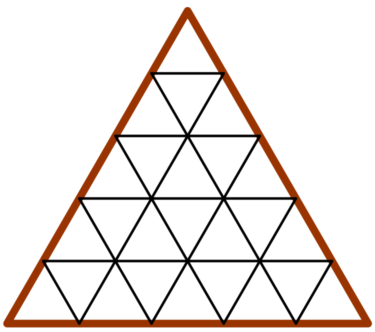

Рис. 1

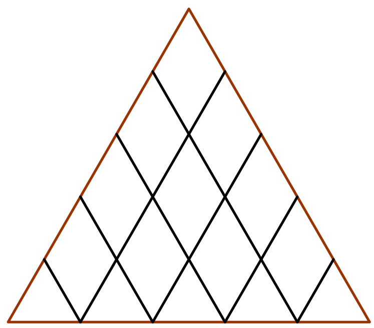

Рис. 2

Какое наибольшее число ромбов со стороной 1 можно вырезать по линиям получившейся сетки?

Ответ: 10.

Решение. Среди 25 треугольников разбиения 15 направлены вверх, а 10 вниз. В любом ромбе по одному треугольнику каждого вида. Поэтому больше 10 ромбов вырезать не удастся. (То же рассуждение можно провести с использованием шахматной раскраски треугольников). Пример, как можно вырезать 10 ромбов, приведён на рис. 2.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. За правильный пример (без обоснования максимальности) 5 баллов. Если получена оценка, но не приведён пример, 10 баллов. Если есть пример, но неполное обоснование максиммальности, то баллы снижаются в зависимости от неполноты обоснований.