Южно-Уральская олимпиада школьников
по математике
11 класс (решения и критерии оценивания)
24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

Ответ: 25 м.

Решение. В тот момент, когда первая машина достигла столба со знаком ограничения скорости, вторая машина находилась в 45 м от него. Пока вторая машина едет к столбу, первая удаляется от него со скоростью, составляющей 5/9 от скорости первой машины. Поэтому к моменту достижения 2-й машиной столба, первая удалится от него на расстояние $45 \cdot 5/9 = 25$ метров.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если ход решения правильный, но из-за арифметических ошибок, связанных с переходом от км/ч в м/с, ответ неверен, ставится 4 балла. Если ход решения верный и ответ верный, но в выкладках есть арифметические ошибки, компенсирующие друг друга, ставится 8 баллов.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \log_2 x.$$

Ответ: 1.

Решение. Решая систему неравенств $x^2 - x \geqslant 0, 4 - 3x - x^2 \geqslant 0, x > 0$, находим, что ОДЗ состоит из одной точки $x = 1$. Подстановка подтверждает, что 1 — корень уравнения.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдена ОДЗ, но проверки того, что 1 — корень, не сделано, 9 баллов. Если корень угадан, но не доказано, что нет других корней, 3 балла.

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y + x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a < 0$ и $a = 1$.

Решение. Построим график первого уравнения. При $y \geqslant -x$ после раскрытия модуля получаем $x = 1$. При $y \leqslant -x$ имеем $y = -1$. Значит, графиком является ломаная с вершиной в точке $A(1; -1)$ со звеньями, параллельными осям координат (рис. 1). Графиком второго уравнения является прямая, проходящая через точку $B(0; -2)$ и имеющая угловой коэффициент a.

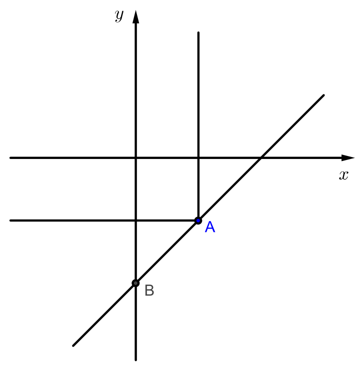

Рис. 1

Нужно выбрать a так, чтобы прямая и ломаная имели ровно одну общую точку. Так будет только в том случае, когда прямая образует тупой угол с осью Ox (т. е. $a < 0$) или когда прямая пройдёт через вершину ломаной (при этом $a = 1$).

Оценивание. За верное решение 15 баллов. Если (обоснованно) найдено только значение $a = 1$, за это 5 баллов.

4. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $c \cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2013^2 = 4\,052\,169$.

Решение.

Первый способ. $ab \,\vdots\, 3c$, $bc \,\vdots\, 11a \Rightarrow ab^2c \,\vdots\, 33ac \Rightarrow b^2 \,\vdots\, 33$. Если квадрат целого числа n делится на простое число p, то и само число n делится на p (иначе его квадрат не был бы кратен p). Поскольку b^2 делится и на 3, и на 11, верно, что тем же свойством обладает и число b. Значит, b делится и на 33.

Аналогично получаем, что $c \vdots 11 \cdot 61$, $a \vdots 3 \cdot 61$. Значит, $abc \vdots 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 3 \cdot 61 = (3 \cdot 11 \cdot 61)^2 = 2013^2 = 4052169$.

Поэтому $abc \geqslant 2013^2$. Равенство здесь достигается при $a = 3 \cdot 61$, $b = 3 \cdot 11$, $c = 11 \cdot 61$.

Второй способ. Среди делителей чисел a, b и c встречаются 3, 11 и 61. При этом каждый из этих простых делителей встречается не менее двух раз. Действительно, из условия $ab \,\vdots\, 3c$ следует, что хотя бы одно из чисел a или b делится на 3. Пусть это, к примеру, число a. Но bc кратно a. Значит, b или c делится на 3. Аналогичные рассуждения для 11 и 61. Поэтому $abc \,\vdots\, (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$. Окончание решения такое же, как в 1-м способе.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. За правильный ответ (без обоснования минимальности) 5 баллов. Если получена лишь оценка $abc \geqslant 3 \cdot 11 \cdot 61$, за это 3 балла. Если получена оценка $abc \geqslant (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$, но не приведён пример, 10 баллов. Если есть пример, но неполное обоснование минимальности, то баллы снижаются в зависимости от неполноты обоснований.

5. Известно, что $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ — ненулевые числа, причём

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{999} - x_{1000}| + |x_{1000} - x_1| = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{1000}|$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Решение. Сложив 1000 неравенств

$$|x_i - x_{i+1}| \leqslant |x_i| + |x_{i+1}|$$

для $i = 1, 2, \ldots, 1000$ (полагая, что $x_{1001} = x_1$), получим $1 \leqslant 2S$ (в правых частях этих неравенств каждый модуль $|x_i|$ встретится по два раза).

Значит, $S \geqslant \dfrac{1}{2}$. Это — **оценка**.

Заметим, что $|a-b| = |a|+|b| \iff ab \leqslant 0$. Поскольку по условию все x_i отличны от нуля, для постреения примера с минимальной суммой модулей нужно выбирать числа так, чтобы соседние числа имели разный знак. Один из возможных вариантов:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{999} = \frac{1}{2000}; \quad x_2 = x_4 = \ldots = x_{1000} = -\frac{1}{2000}.$$

В этом примере для любого i имеем $|x_i - x_{i+1}| = \frac{1}{1000}$, все условия для чисел x_i выполнены и $S = \frac{1}{2}$.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. Если получена только оценка $S \geqslant \frac{1}{2}$, за это 7 баллов. Если кроме оценки есть пример типа $\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots$ (участник олимпиады не обратил внимание на то, что числа должны быть не равными нулю), 10 баллов. Если имеется верный пример, но нет доказательства минимальности, 7 баллов.

6. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются друг друга. Докажите, что касаются друг друга и окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD.

Доказательство.

I. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным.

Обозначим точки касания окружностей так, как показано на рис. 2.

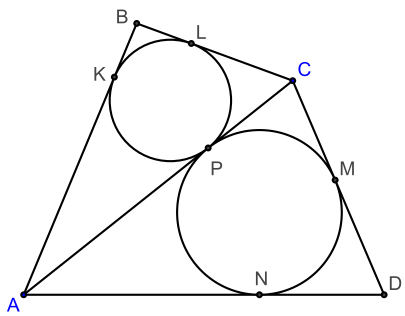

Рис. 2

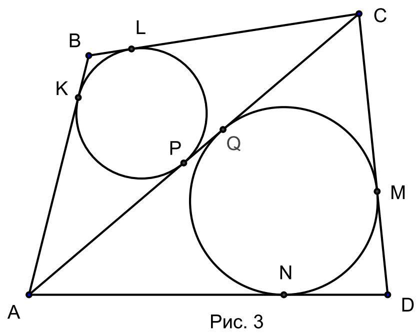

Рис. 3

Из равенств отрезков касательных $AN = AP = AK$, $ND = DM$, $BL = KB$, $LC = PC = MC$ следует, что

$$AD + BC = AN + ND + BL + LC = AK + DM + KB + MC = AB + DC.$$

Значит, $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

II. Пусть в описанном четырёхугольнике проведена диагональ. Докажем, что окружности, вписанные в получившиеся треугольники, касаются друг друга.

В обозначениях рис. 3 из равенств $AD + BC = AB + CD$, $KB = BL$, $ND = MD$ следует, что

$$AK + CM = CL + AN. \qquad (1)$$

С другой стороны, $AC = AP + PC = AK + CL = AQ + QC = AN + CM$, откуда

$$AK + CL = CM + AN. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает равенство $CL = CM$. Но $CL = CP$, а $CM = CQ$. Значит, $CP = CQ$ — точки P и Q совпадают, а окружности, вписанные в соответствующие треугольники, касаются друг друга.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. Если доказано утверждение I, но не доказано обратное к нему утверждение II, 5 баллов.

7. Докажите, что на рёбрах любого описанного многогранника можно расставить такие числа, что площадь любой грани этого многогранника численно равна сумме чисел, расставленных на рёбрах, ограничивающих эту грань.

Доказательство. Пусть точка O — центр вписанной сферы. Рассмотрим две смежные грани. Пусть их общее ребро — AB, а K и M — точки касания этих граней и сферы. Тогда $AK = AM$, $BK = BM$ (отрезки касательных, проведённых от точки к сфере до точек касания, равны между собой). Значит, треугольники ABK и ABM — равные (по трём сторонам).

Для каждой грани соединим отрезками точку касания этой грани и вписанной сферы с вершинами грани. Грани будут разбиты на треугольники. При этом, как показано выше, треугольники, у которых ребро многогранника является общей стороной, равны. Значит, в качестве числа, приписанного ребру, можно взять площадь примыкающего к нему треугольника.

Оценивание. За верное решение 15 баллов.