Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

10 класс (решения и критерии оценивания)

24 марта 2013 г.

1. Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 45 м. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/ч. Каким после этого будет расстояние между машинами?

Ответ: 25 м.

Решение. В тот момент, когда первая машина достигла столба со знаком ограничения скорости, вторая машина находилась в 45 м от него. Пока вторая машина едет к столбу, первая удаляется от него со скоростью, составляющей 5/9 от скорости первой машины. Поэтому к моменту достижения 2-й машиной столба, первая удалится от него на расстояние $45 \cdot 5/9 = 25$ метров.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если ход решения правильный, но из-за арифметических ошибок, связанных с переходом от км/ч в м/с, ответ неверен, ставится 4 балла. Если ход решения верный и ответ верный, но в выкладках есть арифметические ошибки, компенсирующие друг друга, ставится 8 баллов.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{4 - 3x - x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: 1.

Решение. Решая систему неравенств $x^2 - x \geqslant 0, 4 - 3x - x^2 \geqslant 0$, находим ОДЗ: $[-4; 0] \cup \{1\}$. При $x \in [-4; 0]$ левая часть уравнения неотрицательна, а правая отрицательна. При $x = 1$ обе части уравнения равны нулю.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдена ОВР, но проверки того, что 1 — корень, не сделано, 10 баллов. Если корень угадан, но не доказано, что нет других корней, 3 балла.

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |y + x| = 2 - x + y; \\ ax - y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $a < 0$ и $a = 1$.

Решение. Построим график первого уравнения. При $y \geqslant -x$ после раскрытия модуля получаем $x = 1$. При $y \leqslant -x$ имеем $y = -1$. Значит, графиком является ломаная с вершиной в точке $A(1; -1)$ со звеньями, параллельными осям координат (рис. 1). Графиком второго уравнения является прямая, проходящая через точку $B(0;-2)$ и имеющая угловой коэффициент a.

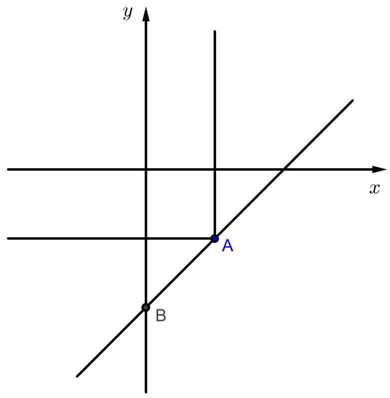

Рис. 1

Нужно выбрать a так, чтобы прямая и ломаная имели ровно одну общую точку. Так будет только в том случае, когда прямая образует тупой угол с осью Ox (т. е. $a<0$) или когда прямая пройдёт через вершину ломаной (при этом $a=1$).

Оценивание. За верное решение 15 баллов. Если (обоснованно) найдено только значение $a=1$, за это 5 баллов.

4. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём числа $a\cdot b$, $b\cdot c$ и $c\cdot a$ делятся соответственно на числа $3c$, $11a$ и $61b$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2013^2 = 4\,052\,169$.

Решение.

Первый способ. $ab \,\vdots\, 3c$, $bc \,\vdots\, 11a \Rightarrow ab^2c \,\vdots\, 33ac \Rightarrow b^2 \,\vdots\, 33$. Если квадрат целого числа n делится на простое число p, то и само число n делится на p (иначе его квадрат не был бы кратен p). Поскольку b^2 делится и на 3, и на 11, верно, что тем же свойством обладает и число b. Значит, b делится и на 33.

Аналогично получаем, что $c \vdots 11\cdot 61$, $a \vdots 3\cdot 61$. Значит, $abc \vdots 3\cdot 11\cdot 11\cdot 61\cdot 3\cdot 61 = (3\cdot 11\cdot 61)^2 = 2013^2 = 4052169$.

Поэтому $abc \geqslant 2013^2$. Равенство здесь достигается при $a=3\cdot 61$, $b=3\cdot 11$, $c=11\cdot 61$.

Второй способ. Среди делителей чисел a, b и c встречаются 3, 11 и 61. При этом каждый из этих простых делителей встречается не менее двух раз. Действительно, из условия $ab \,\vdots\, 3c$ следует, что хотя бы одно из чисел a или b делится на 3. Пусть это, к примеру, число a. Но bc кратно a. Значит, b или c делится на 3. Аналогичные рассуждения для 11 и 61. Поэтому $abc \,\vdots\, (3\cdot 11\cdot 61)^2$. Окончание решения такое же, как в 1-м способе.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. За правильный ответ (без обоснования минимальности) 5 баллов. Если получена лишь оценка $abc \geqslant 3 \cdot 11 \cdot 61$, за это 3 балла. Если получена оценка $abc \geqslant (3 \cdot 11 \cdot 61)^2$, но не приведён пример, 10 баллов. Если есть пример, но неполное обоснование минимальности, то баллы снижаются в зависимости от неполноты обоснований.

5. Известно, что $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ — ненулевые числа, причём

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{999} - x_{1000}| + |x_{1000} - x_1| = 1.$$

Найдите наименьшее возможное значение суммы $S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{1000}|$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Решение. Сложив 1000 неравенств

$$|x_i - x_{i+1}| \leqslant |x_i| + |x_{i+1}|$$

для $i = 1, 2, \ldots, 1000$ (полагая, что $x_{1001} = x_1$), получим $1 \leqslant 2S$ (в правых частях этих неравенств каждый модуль $|x_i|$ встретится по два раза).

Значит, $S \geqslant \dfrac{1}{2}$. Это — **оценка**.

Заметим, что $|a-b| = |a|+|b| \iff ab \leqslant 0$. Поскольку по условию все x_i отличны от нуля, для пострения примера с минимальной суммой модулей нужно выбирать числа так, чтобы соседние числа имели разный знак. Один из возможных вариантов:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{999} = \frac{1}{2000}; \quad x_2 = x_4 = \ldots = x_{1000} = -\frac{1}{2000}.$$

В этом примере для любого i имеем $|x_i - x_{i+1}| = \frac{1}{1000}$, все условия для чисел x_i выполнены и $S = \frac{1}{2}$.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. Если получена только оценка $S \geqslant \frac{1}{2}$, за это 7 баллов. Если кроме оценки есть пример типа $\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots$ (участник олимпиады не обратил внимание на то, что числа должны быть не равными нулю), 10 баллов. Если имеется верный пример, но нет доказательства минимальности, 7 баллов.

6. Докажите, что в треугольнике ABC угол ABC вдвое больше угла CAB тогда и только тогда, когда

$$BC^2 + BC \cdot AB = AC^2.$$

Доказательство.

I. Пусть $\angle A = 2\angle B$. Проведём биссектрису BD (рис. 2).

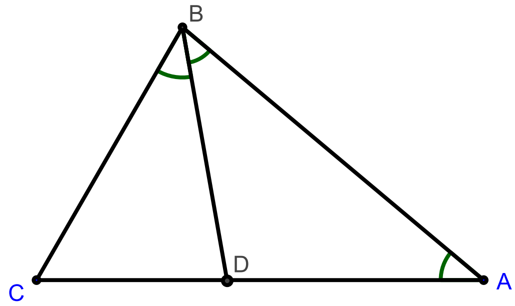

Рис. 2

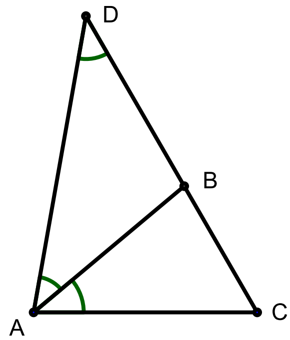

Рис. 3

Угол BDC — внешний для треугольника ABD. Он равен сумме двух внутренних углов этого треугольника, не смежных с внешним: $\angle BDC = \angle A + \angle ABD$, но $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle B = \angle A$, поэтому $\angle BDC = 2\angle A = \angle B$. Отсюда вытекает подобие треугольников ABC и BDC. Из пропорции

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC} \tag{1}$$

с учётом равенства $AD = BD$ (в треугольник ABD углы при стороне AB равны) получаем

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC - DC} = \frac{AC}{BC},$$

откуда

$$AC^2 - AC \cdot DC = AB \cdot BC. \tag{2}$$

Но из (1) также следует, что $AC \cdot DC = BC^2$. Поэтому (2) можно переписать в виде

$$AC^2 - BC^2 = AB \cdot BC.$$

Это и требовалось доказать.

II. Пусть $BC^2 + BC \cdot AB = AC^2$. Отложим на продолжении отрезка CB за точку B отрезок BD, равный BA (рис. 3).

Тогда $CD = CB + BD = CB + BA$. По условию, $\frac{AC}{BC+AB} = \frac{BC}{AC}$. Значит, $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$. Отсюда следует подобие треугольников CAD и CBA. Следовательно, $\angle CAB = \angle CDA$ и $\angle CBA = \angle CAD$. Заметим также, что треугольник ABD равнобедренный, а угол ABC — внешний для этого треугольника. Поэтому $\angle ABC = 2\angle ADB = 2\angle CDA = 2\angle CAB$. Доказано, что в треугольнике ABC выполняется соотношение $\angle B = 2\angle A$.

Алгебраический способ. Обозначим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$. С помощью равенства $a^2 + ac = b^2$ имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 + ac + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a + c}{2b};$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-a^2-ac}{2ac} = \frac{c-a}{2a}.$$

Исходя из этих соотношений несложно проверить, что $\cos\beta = \cos 2\alpha$. При этом $\alpha < \beta$ (поскольку $a < b$), откуда $\alpha < \frac{\pi}{2}$ и $2\alpha < \pi$. Теперь из равенства $\cos\beta = \cos 2\alpha$ и неравенств $0 < \beta, 2\alpha < \pi$ следует равенство $\beta = 2\alpha$.

Оценивание. За верное решение 15 баллов. За доказательство только «в одну сторону» 7 баллов. Если имеется лишь пункт II, и в алгебраическом способе решения не обоснован переход от равенства косинусов к равенству углов, — 5 баллов.

7. Точка M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$. На отрезке MD выбрана точка O. Лучи AO, BO, CO пересекают боковые грани пирамиды в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию пирамиды.

Решение.

Первый способ. Воспользуемся методом масс. Разместим в вершинах пирамиды $ABCD$ такие массы, чтобы их центр масс был в точке O. При этом центр масс в точках A, B и C должен быть в точке M — точке пересечения медиан треугольника ABC. Поэтому в вершинах A, B и C должны быть равные массы, возьмём их единичными. Пусть масса в точке D равна m.

Обозначим середины рёбер AB, BC и CA через C_2, A_2 и B_2 (рис. 4).

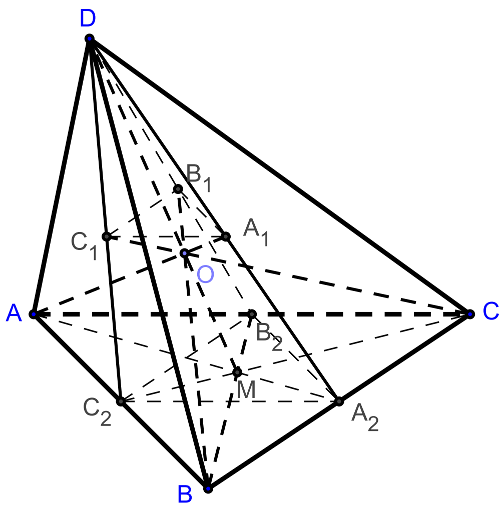

Рис. 4

Если группировать массы в точках A, B и D, то их центр масс должен быть в точке C_1 (иначе центр масс не попадёт на отрезок CC_1). С другой стороны, массы в вершинах A и B можно заменить массой 2 в точке C_2. Отсюда $DC_1 : C_1C_2 = 2 : m$. Аналогично, $DB_1 : B_1B_2 = 2 : m$, $DA_1 : A_1A_2 = 2 : m$.

Рассмотрим треугольник DC_2A_2. В нём точки C_1 и A_1 делят стороны DC_2 и DA_2 в одинаковом отношении. Поэтому $C_1A_1 \parallel C_2A_2$ (в силу, например, подобия треугольников DC_1A_1 и DC_2A_2). Аналогично, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Получилось, что две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости $A_1B_1C_1$, соответственно параллельны двум прямым плоскости ABC. Отсюда следует параллельность этих плоскостей.

Второй способ. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью CDM — треугольник CDC_2. Пусть $DO : OM = t$. Зная, в каком отношении точка M делит отрезок CC_2, несложно найти, что $DC_1 : C_1C_2 = 2t/3$. Окончание доказательства — такое же, как в предыдущем способе.

Оценивание. За верное решение 15 баллов.