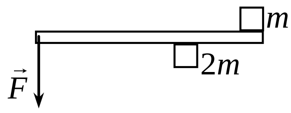
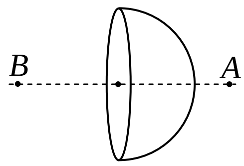
2.3. Олимпиада им. академика И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. На горизонтальной поверхности лежат два тела массой $2m$ и m. Расстояние между ними l. Между телами вставили легкий стержень длиной $3l$ и подействовали на его конец горизонтальной силой F. При каком минимальном значении F одно из тел сдвинется с места? Коэффициент трения между телами и поверхностью - k.

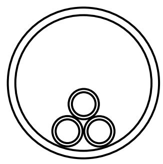


2. В сосуде находится озон O_3 при температуре T и давлении p. Когда газ изохорически нагрели до температуры $2T$, давление газа в сосуде стало равно $2,2p$. Какая доля молекул озона превратилась в молекулярный кислород?

3. Имеется равномерно заряженная полусфера радиуса R. Потенциал поля полусферы в ее центре равен φ_0, а в точке A, лежащей на прямой, перпендикулярной стягивающему ее кругу, на расстоянии $3R/2$ справа от центра равен φ_1 (см. рис.). Найти потенциал поля полусферы в точке B, лежащей на той же прямой на расстоянии $3R/2$ слева от центра.



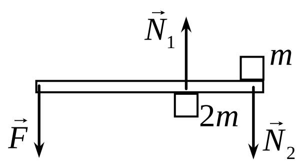
4. Три одинаковые гладкие трубы с радиусом r находятся в равновесии внутри массивной трубы радиуса R, при этом малые трубы расположены так, как показано на рисунке. При каком минимальном значении R равновесие труб будет нарушено. Трение между всеми поверхностями отсутствует.



5. Известно, что орбита Земли вытянута (эллипс), а Солнце сдвинуто относительно центра орбиты. Когда расстояние между Землей и Солнцем меньше – летом или зимой? Оценить, во сколько раз отличается расстояние между Землей и Солнцем летом и зимой. Можно использовать следующие астрономические данные: солнцестояния – 21 декабря и 21 июня, равноденствия – 20 марта и 23 сентября (2014 г.). Ответ обосновать. **Указание.** Среднее расстояние между Солнцем и Землей - $1{,}5 \cdot 10^8$ км. Произведение vr, где v - скорость Земли, r - расстояние от Земли до Солнца, не меняется в процессе движения Земли.

Ответы и решения

1. Пока тела не сдвинулись с места, стержень также покоится. Поэтому до самого момента сдвига одного из тел для стержня справедливы уравнения статики. На стержень действуют: внешняя сила $\vec{F}$, силы реакции со стороны тел $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Из условия моментов относительно точек приложения этих сил получаем



$$N_1 = 3F$$
$$N_2 = 2F$$

Условия сдвига тел.

$$N_1 = 3F \geq 2kmg, \quad \Rightarrow \quad F \geq \frac{2kmg}{3}$$

$$N_2 = 2F \geq kmg, \quad \Rightarrow \quad F \geq \frac{kmg}{2}$$

Отсюда следует, что при увеличении силы F сначала нарушается второе неравенство. Это значит, что первым сдвинется тело массой m при значении внешней силы $F = \frac{kmg}{2}$.

2. Закон Клапейрона-Менделеева для озона в сосуде (в начале) и для смеси озона и молекулярного кислорода (после нагревания) дают

$$pV = NkT$$
$$2,2pV = N_1 k 2T$$

где p, V и T - давление, объем и температура газа до нагревания, N и N_1 - полное количество молекул в соседе до и после нагревания, k - постоянная Больцмана. Деля второе уравнение на первое, получим

$$\frac{N_1}{N} = 1,1$$

Реакция превращения озона в кислород имеет вид $2O_3 \to 3O_2$, т.е. из каждых двух молекул озона получаются три молекулы кислорода. Поэтому, если в кислород превратилась α-ая часть молекул озона, то число молекул в сосуде изменилось так

$$N_1 = (1-\alpha)N + \frac{3}{2}\alpha N = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)N.$$

Отсюда

$$\alpha = 0,2$$

3. Обозначим искомый потенциал как φ_B. Для его нахождения дополним полусферу до полной сферы. Тогда согласно принципу суперпозиции потенциал поля сферы в точке В будет складываться из потенциалов полей левой $\Phi_{лев}$ и правой $\Phi_{пр}$ полусфер

$$\varphi = \frac{kQ}{3R/2} = \frac{2kQ}{3R} = \Phi_{лев} + \Phi_{пр}$$

где k - постоянная закона Кулона, Q - заряд сферы, который равен удвоенному заряду данной в условии полусферы. Очевидно, потенциал левой полусферы в точке В - $\Phi_{лев}$ - совпадает с потенциалом правой полусферы в точке А, и потому $\Phi_{лев} = \varphi_1$. Потенциал правой полусферы в точке В - это та величина, которую следует найти - $\Phi_{пр} = \varphi_B$, поэтому

$$\varphi_B = \frac{2kQ}{3R} - \varphi_1 \tag{1}$$

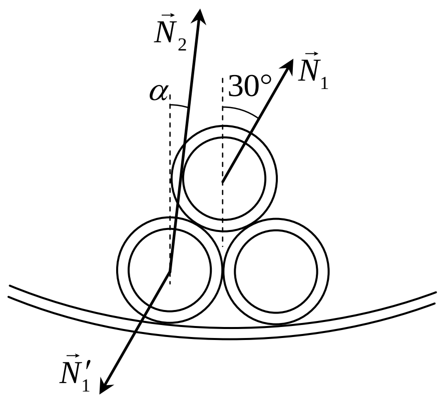
С другой стороны, потенциал поля полусферы в ее центре равен

$$\varphi_0 = \frac{k(Q/2)}{R} = \frac{kQ}{2R} \tag{2}$$

Из (1), (2) находим

$$\varphi_B = \frac{4}{3}\varphi_0 - \varphi_1$$

4. На верхнюю трубу действуют: сила тяжести и силы со стороны двух нижних труб (на рисунке показана только одна из этих сил - $\vec{N}_1$). Поскольку треугольник, вершинами которого являются центры малых труб, равносторонний, угол между силами, действующими на верхнюю трубу со стороны нижних, и вертикалью равен $30°$. Поэтому из условия равновесия верхней малой трубы заключаем



$$N_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

где m - масса верхней трубы. На нижнюю трубу действует сила тяжести ($m\vec{g}$), сила со стороны верхней ($\vec{N}_1'$) и со стороны большой трубы ($\vec{N}_2$), причем сила $\vec{N}_2$ направлена в центр большой трубы. Поскольку две нижних трубы касаются между собой, то для угла между силой $\vec{N}_2$ и вертикалью имеем очевидное соотношение

$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r}$$

Из вертикальной проекции условия равновесия нижней трубы имеем

$$mg + N_1\cos 30° = N_2\cos\alpha$$

Отсюда

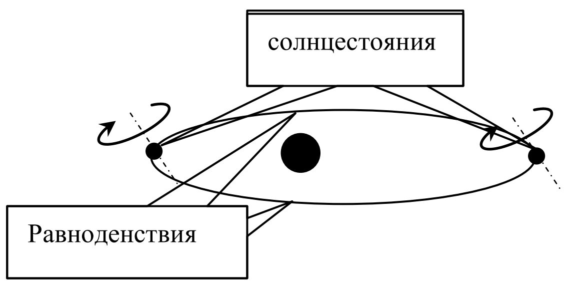
$$N_2 = \frac{3mg}{2\cos\alpha} = \frac{3mg\left(R-r\right)}{2\sqrt{\left(R-r\right)^2 - r^2}}$$

Трубы будут разъезжаться, если горизонтальная составляющая силы $\vec{N}_1'$ будет больше горизонтальной составляющей силы $\vec{N}_2$: $N_1\sin 30° \geq N_2\sin\alpha$. Или

$$\frac{mg}{2\sqrt{3}} \geq \frac{3mg\left(R-r\right)\sin\alpha}{2\sqrt{\left(R-r\right)^2 - r^2}} = \frac{3mgr}{2\sqrt{\left(R-r\right)^2 - r^2}}$$

Отсюда находим

$$R \geq \left(1 + 2\sqrt{7}\right)r$$



5. Придвижении Земли вокруг Солнца ось ее собственного вращения сохраняет направление в пространстве. В тот момент, когда угол между радиусом, проведенным из Солнца на Землю, перпендикулярен оси собственного вращения Земли, продолжительность дня в Северном и Южном полушариях одинакова (равноденствия). Самый короткий день в одном полушарии и самый длинный в другом (солнцестояния) будут иметь место, когда угол между радиусом, проведенным из Солнца на Землю, и осью собственного вращения Земли минимален. Между осенним и зимним равноденствиями проходит 178 дней (с точностью до дня, часы наступления равноденствий не даны в условии[1]), а между весенним и осенним – 187 дней. Между солнцестояниями проходят (также с точностью до дня) одинаковые интервалы времени – 182-183 дня. Это значит, что зимний (в Северном полушарии) отрезок орбиты Земли более короткий, чем летний, а весенний и осенний - одинаковы. Или, другими словами, зимой Земля ближе к Солнцу, чем летом. Оценим разность расстояний. Пусть среднее расстояние между Землей и Солнцем R. Тогда зимой оно - $R-\Delta R$, летом - $R+\Delta R$. Время прохода Земли по зимней и летней частям орбиты равны

$$t_{зим}=\frac{\pi\left(R-\Delta R\right)}{v_{зим}}$$
$$t_{лет}=\frac{\pi\left(R+\Delta R\right)}{v_{лет}}$$

С другой стороны из данного в условии указания имеем

$$\left(R-\Delta R\right)v_{зим}=\left(R+\Delta R\right)v_{лет}=\alpha$$

где α - некоторая постоянная. Отсюда имеем для времени прохода летней и зимней частей орбиты

$$t_{зим}=\frac{\pi\left(R-\Delta R\right)^2}{\alpha}$$
$$t_{лет}=\frac{\pi\left(R+\Delta R\right)^2}{\alpha}$$

Деля эти уравнения друг на друга, находим

$$\Delta R=R\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

где

$$x=\sqrt{\frac{t_{лет}}{t_{зим}}}=1,025$$

(эти вычисления можно выполнить без калькулятора, в столбик). Отсюда

$$\Delta R\approx R\left(\frac{0,025}{2}\right)=0,0125R\approx 2\cdot 10^6 \text{ км.}$$

[1] при условии, что в феврале -28 дней.

Поэтому расстояние от Земли до Солнца зимой – 148 миллионов километров, летом – 152 миллиона километров (точные цифры: среднее расстояние - 149,6 млн. км – 147,1 млн. км зимой, и 152,1 млн. км летом).