2.6. Задания олимпиады им. И.В.Курчатова (Отборочный этап олимпиады «Росатом»), 11 класс

Задания

1. Двузначное, целое, положительное число x не оканчивается на 9. Двузначное число y получено из числа $x+1$ путем перестановки его цифр. Оказалось, что число $x+y+1$ является квадратом целого числа. Найти наибольшее число x, удовлетворяющее этим условиям.

2. Для функции $f(x)=x/(2x+1)$ и любого натурального числа n решить уравнение

$$\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f(\sin x)\right)\right)\right)}_{n}=1/(2n+2).$$

3. Задана последовательность функций $f_n(x)=x^2+x-6+(n-1)\left(\log_2|x|+\sin\pi x+\cos\pi x\right)$.

При каких x сумма первых n ее членов равна n^2-n при любых натуральных n ?

4. Муравьи Гоша и Кеша бегают по поверхности куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a по замкнутым траекториям, пробегая их много раз. Гоша пробегает стороны квадрата основания $ABCD$, преодолевая расстояние a за 3 минуты. Кеша бежит по сторонам треугольника $CB'D'$, покрывая расстояние a за 2 минуты. В момент начала движения Гоша находился в вершине A, а Кеша – в вершине C. Докажите, что Гоша и Кеша никогда не встретятся. В момент времени T оказалось, что Кеша находится в вершине C, а Гоша на расстоянии не большем, чем $a/10$ от него. Найти наименьшее возможное значение T ($\sqrt{2}\approx 1,4142$)

5. Найти все $x\in[0;2\pi]$, для которых $[\sin 2x]=[\sin 3x]$, где $[a]$ наибольшее целое число, не превосходящее a (целая часть a).

6. На боковых ребрах DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки M и N так, что $BM:MD=1:2$ и $CN=ND$. Через вершину A основания пирамиды и точки M и N проведена плоскость, пересекающая медианы боковых граней в точках K,R и T. Найти отношение объемов пирамид $KRTC$ и $ABCD$.