Ответы и решения

1. $x = 10a + b,\ a,b -$ цифры, $b \neq 9,\quad y = 10(b+1) + a,\quad x + y + 1 = 11(b+1) + 11a = 11((a+b+1) = z^2$ Число $x+y+1=11\left(a+b+1\right)\le 11\cdot 18=198.$

Число z делится на 11, $z=11k \to z^2 = 121\cdot k^2 \to 121k^2 \le 198 \to k=1 \to a+b+1=11 \to a+b=10.$

$x_{max} = 91$

Ответ: $x_{max} = 91$

2.

$$f\left(f(x)\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{2\left(\frac{x}{2x+1}\right)+1} = \frac{x}{4x+1},\quad f\left(f\left(f(x)\right)\right) = \frac{\frac{x}{4x+1}}{2\left(\frac{x}{4x+1}\right)+1} = \frac{x}{6x+1}\ .$$

Продолжая итерацию n раз, придем к тому, что $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots f(x)\right)\right)\right)}_{n} = \frac{x}{2nx+1}$ и исходное уравнение примет форму $\frac{\sin x}{2n\cdot \sin x+1} = \frac{1}{2(n+1)} \to 2(n+1)\sin x = 2n\sin x + 1 \to \sin x = \frac{1}{2}$ при любых n .

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$ при любых $n \in N$

3. При $n=1$ $f_1(x) = x^2 + x - 6 = S_1 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

При $x=2$ последовательность $f_n(2) = (n-1)\left(\log_2 2 + \sin 2\pi + \cos 2\pi\right) = 2(n-1)$ является арифметической прогрессией. Сумма n ее членов равна $S_n(2) = n(n-1)$, поэтому $x=2$ решение.

При $x=-3$ последовательность $f_n(2) = (n-1)\left(\log_2 3 - \sin 3\pi + \cos 3\pi\right) = (\log_2 3 - 1)(n-1)$ также является арифметической прогрессией с суммой $S_n(-3) = (\log_2 3 - 1)\frac{n(n-1)}{2}$, которая не удовлетворяет условию.

Ответ: $x=2$

4. $v_g = \frac{a}{3}, v_k = \frac{a}{2}$ - скорости движения Гоши и Кеши

$T_m = \frac{2a+4am}{v_g} = 6(2m+1),\ m = 0,1,\ldots$ моменты времени, когда Гоша находится в вершине C .

$T_k = \dfrac{3a\sqrt{2}}{v_k}k = 6k\sqrt{2},\ k = 1, 2, ...$ - моменты времени, когда Кеша находится в вершине C.

Если бы они встретились в вершине C, а другого места встречи в условиях не предусмотрено, то при целых k и m : $T_m = T_k \to 6k\sqrt{2} = 6(2m+1) \to \sqrt{2} = \dfrac{2m+1}{k}$

Последнее невозможно, поскольку $\sqrt{2}$ - число иррациональное.

Пусть в момент времени T_k Кеша находится в вершине C, а Гоша удален от него на расстояние не большее $a/10$, то $|T_m - T_k| \cdot v_g \le \dfrac{a}{10} \to \left|k\sqrt{2} - (2m+1)\right| \le 0,05$. Необходимо найти наименьшее k, при котором возможно полученное неравенство при целом m. Ниже приведены результаты вычислений $k\sqrt{2}, m$ и $\Delta = \left|k\sqrt{2} - (2m+1)\right|$ для $k = 2, 3, ..., 12$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k\sqrt{2}$	2.828	4.247	5.657	7.071	8.485	9.899	11.31	12.728	14.142	15.556	16.97
m	1	2	2	3	4	4	5	6	7	7	8
Δ	0,17	0,75	0,66	0,07	0,51	0,89	0,31	0,27	0,85	0,55	0,03

Наименьшее допустимое $k = 12$, $T_{\min} = T_{12} = 72\sqrt{2}$

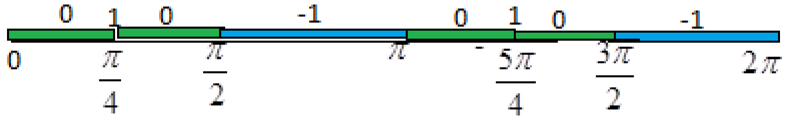
Ответ: $T_{\min} = T_{12} = 72\sqrt{2}$

5. Выражение $[\sin 2x]$ принимает значения -1; 0; 1. Функции $\sin 2x$ и $\sin 3x$ имеют общий период 2π

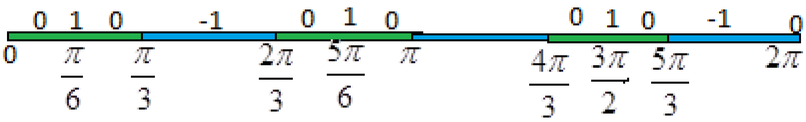
Отметим на отрезке $[0; 2\pi]$ точки x, для которых $[\sin 2x] = -1$

$[\sin 2x] = -1$, если $\sin 2x < 0 \to x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ и точки, для которых $[\sin 2x] = 0$:

$[\sin 2x] = 0$, если $0 \le \sin 2x < 1 \to x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \dfrac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Наконец, при $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \dfrac{5\pi}{4}$ $[\sin 2x] = 1$



Аналогичную картинку можно получить для распределения значений $[\sin 3x]$:

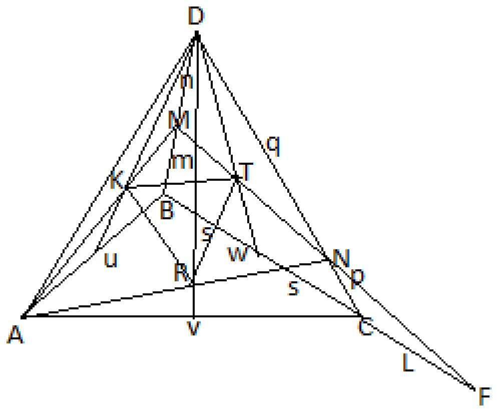


Пересечение множеств, окрашенных в одинаковый цвет, дает решение уравнения на отрезке $\left[0;2\pi\right]$:

$$x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left[\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$$

Ответ: $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left[\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$

6.



Найдем отношение $\frac{DK}{Du}$:

Для треугольника BDu и секущей MA (т. Менелая):

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{DK}{Ku}\cdot\frac{1}{2}=1\to\frac{DK}{Ku}=\frac{2n}{m}\to\frac{DK}{Du}=\frac{DK}{DK+Ku}=\frac{2n/m}{2n/m+1}=\frac{2n}{2n+m}$$

Отношение $\frac{DR}{Dv}=\frac{2q}{2q+p}$ (по аналогии)

Найдем отношение $\frac{DT}{Dw}$:

Для треугольника BDw и секущей MF (т. Менелая):

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{DT}{Tw}\cdot\frac{s+L}{2s+L}=1\ (*)$$

Для треугольника wDC и секущей TF (т. Менелая):

$$\frac{Tw}{DT}\cdot\frac{q}{p}\cdot\frac{L}{s+L}=1\quad(**)$$

Перемножая (*) и (**), получим $\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}\cdot\frac{L}{2s+L}=1\to\frac{2s+L}{L}=\frac{mq}{np}\to\frac{s}{L}=\frac{mq-np}{2np}$

Тогда $\dfrac{s+L}{2s+L}=\dfrac{s/L+1}{2s/L+1}=\dfrac{\dfrac{mq-np}{2np}+1}{\dfrac{mq-np}{np}+1}=\dfrac{mq+np}{2mq}$. Подставляя полученное выражение в (*), получим

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{DT}{Tw}\cdot\frac{mq+np}{2mq}=1\to\frac{DT}{Tw}=\frac{2nq}{mq+np}\to\frac{DT}{Dw}=\frac{DT}{DT+Tw}=\frac{\dfrac{2nq}{mq+np}}{\dfrac{2nq}{mq+np}+1}=\frac{2nq}{mq+n(p+2q)}$$

Объем пирамиды $V_{Duvw}=\dfrac{1}{4}V_{ABCD}$, объем пирамиды

$$V_{DKRT}=\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{2q}{2q+p}\cdot\frac{2nq}{mq+n(p+2q)}\cdot V_{Duvw}=\frac{2n^2q^2}{(2n+m)(2q+p)(mq+n(p+2q))}V_{ABCD}$$

Отношение объемов $V_{CKRT}:V_{DKRT}=p:q$, поэтому окончательно имеем

$$V_{CKRT}:V_{ABCD}=\frac{p}{q}\cdot\frac{2n^2q^2}{(2n+m)(2q+p)(mq+n(p+2q))}=\frac{2n^2pq}{(2n+m)(2q+p)(mq+n(p+2q))}$$

Ответ: $\dfrac{2n^2pq}{(2n+m)(2q+p)(mq+n(p+2q))}$