

2.6. Олимпиада имени академика И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады Росатом), 11 класс

1. В выражении $(2x^6 + 3)(1 - x^3)^{14}$ раскрыли все скобки и привели подобные при одинаковых степенях x . Укажите значение коэффициента при x^{42} .

2. Найти максимально возможный радиус круга на плоскости, не содержащего внутри себя точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе

$$\text{уравнений : } \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{12} \cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right) . \\ \sin 2y + \cos 2y + \sin y + \cos y + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Найти три целых числа x, y, z на отрезке $[100; 300]$, для которых

$\text{НОД}(x, y) = 3$, $\text{НОД}(z, y) = 8$, $\text{НОД}(x, z) = 7$, а величина $x + y + z$

принимает наименьшее возможное значение.

4. При каких целых a и b уравнение $x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ имеет три различных корня на отрезке $[-2; 1]$, являющихся последовательными членами

арифметической прогрессии?

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 2|x - a + 3| + |2y + a| = 4 \\ (x - y + 3)(x - y + 6) = 0 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

6. Вершины правильного треугольника лежат на трех concentрических окружностях радиусов 3, 4, 5 соответственно. Найти площадь треугольника.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: 185

Решение

Коэффициент a_{42} при x^{42} в выражении $(1 - x^3)^{14}$ равен 1, в коэффициент при x^{36} равен

$a_{36} = C_{14}^{12} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$. Тогда в произведении коэффициент при x^{42} равен

$$2 \cdot a_{36} + 3 \cdot a_{42} = 2 \cdot 91 + 3 = 185 .$$

Задача 2 Ответ: $R_{\max} = \frac{\pi \sqrt{265}}{24}$

Решение

1. Решение первого уравнения в системе:

$$\left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right)^2 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x \rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = \sin x \\ \cos \frac{\pi}{12} - \cos \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = -\sin x \end{cases} .(1)$$

Преобразуем разность в произведение в первом уравнении системы (1):

$$-2 \sin\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \rightarrow \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) - \cos \frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{12} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2\pi m \rightarrow x \in \emptyset \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Второе уравнение в системе (1), помимо $x = 2\pi k$, имеет решения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 2\pi k \rightarrow x \in \emptyset \\ x = \frac{17\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

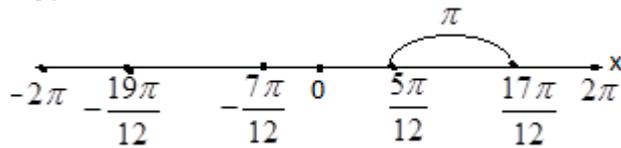
2. Решение второго уравнения в системе:

Преобразование:

$$2 \sin y \cos y + 2 \cos^2 y + \sin y + \cos y = 0 \rightarrow 2 \cos y (\sin y + \cos y) + \sin y + \cos y = 0 \rightarrow$$

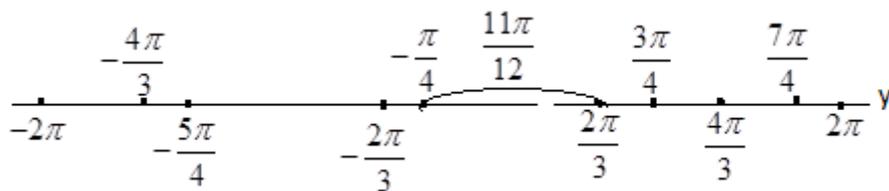
$$\rightarrow (\sin y + \cos y)(2 \cos y + 1) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

Найдем максимальную длину отрезка на оси ОХ, не содержащего внутри себя решений первого уравнения в системе.



Максимальную длину такого отрезка равна π .

Найдем аналогичный отрезок на оси ОУ для решений второго уравнения.



Его максимальная длина $\frac{11\pi}{12}$.

На плоскости имеется прямоугольник $ABCD$, например, с вершинами

$A\left(\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{17\pi}{12}; \frac{2\pi}{3}\right)$, $D\left(\frac{17\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}\right)$ с максимальными длинами сторон, внут-

ри которого нет решений системы. Длины его сторон равны $\frac{11\pi}{12}$ и π . Его диагональ – диа-

метр искомого круга $R_{\max} = \frac{\pi \sqrt{265}}{24}$.

Задача 3 Ответ: $x = 147$, $y = 120$, $z = 112$

Решение

$$\text{НОД}(x, y) = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 3x_1 \\ y = 3y_1, \end{cases} \text{НОД}(x_1, y_1) = 1,$$

$$\text{НОД}(z, y) = 8 \rightarrow \begin{cases} z = 8z_2 \\ y = 8y_2, \end{cases} \text{НОД}(z_2, y_2) = 1$$

$$\text{НОД}(x, z) = 7 \rightarrow \begin{cases} x = 7x_3 \\ z = 7z_3, \end{cases} \text{НОД}(x_3, z_3) = 1$$

$$x = 3x_1 = 7x_3 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 7k \\ x_3 = 3k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow x = 21k$$

$$\text{Из равенств } y = 3y_1 = 8y_2 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 8m \\ y_2 = 3m, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow y = 24m$$

$$z = 8z_2 = 7z_3 \rightarrow \begin{cases} z_2 = 7n \\ z_3 = 8n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow z = 56n$$

Условия на k, m, n :

$$\text{НОД}(k, 8) = 1, \text{НОД}(m, 7) = 1, \text{НОД}(k, m) = 1,$$

$$\text{НОД}(n, 3) = 1, \text{НОД}(k, n) = 1, \text{НОД}(n, m) = 1,$$

т.е. k, m, n - взаимно простые числа, k - не делится на 2, m - не делится на 7, n - не делится на 3.

Из условия, $100 \leq 56n \leq 300 \rightarrow n = 2, 4, 5$ и наименьшее возможное значение $n = 2$.

Из условия $100 \leq 24m \leq 300 \rightarrow m = 5, \dots, 12$, из условия $100 \leq 21k \leq 300 \rightarrow k = 5, \dots, 14$.

Если $n = 2$, то минимально возможное $m = 5$, при этом минимальное $k = 7$.

Тогда $x = 147, y = 120, z = 112 \rightarrow x + y + z = 379$.

Если $n = 4$, то минимальное $m = 5$, а $k = 7$ и сумма $x + y + z$ принимает большее значение. Наконец, если $n = 5$, то минимальное $m = 6$, а $k = 7$ и сумма опять не минимальна.

Задача 4 Ответ: $a = 2, b = 0$

Решение

Пусть x_1, x_2, x_3 - искомые решения. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = -3$ и $x_1 + x_3 = 2x_2 \rightarrow 3x_2 = -3 \rightarrow x_2 = -1$.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$(x+1)(x^2 + 2x + a - 2) = 0$. При этом $a - b = 2$. Корни уравнения $x^2 + 2x + a - 2 = 0$ должны суще-

$$\text{ствовать и принадлежать отрезку } [-2; 1] : \begin{cases} a < 3 \\ -1 - \sqrt{3 - a} \geq -2 \rightarrow a \in [2; 3) \\ -1 + \sqrt{3 - a} \leq 1 \end{cases}$$

На этом множестве только одно целое $a = 2$, при этом $b = a - 2 = 0$.

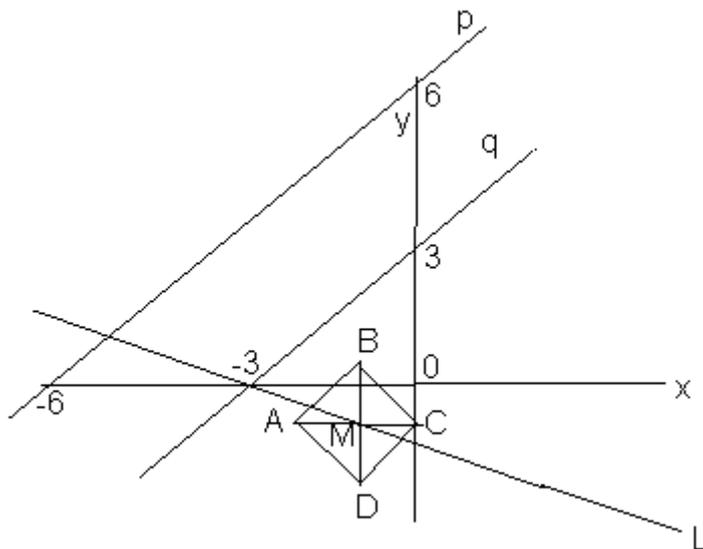
$$\text{Задача 5 Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Решение

Первому уравнению системы удовлетворяют точки с координатами $(x; y)$, лежащие на границе

квадрата $ABCD$ с центром в точке $M\left(a - 3; -\frac{a}{2}\right)$ и сторонами AB и CD параллельными прямым

$x - y = -3$ и $x - y = -6$.



При изменении параметра a центр квадрата движется по прямой L . Уравнение стороны AB :

$x - y = \frac{3a}{2} - 5$, стороны CD : $x - y = \frac{a}{2} - 1$. Прямая AB совпадет с прямой q , если

$\frac{3a}{2} - 5 = -3 \rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$, а прямая CD , если $\frac{3a}{2} - 1 = -3 \rightarrow a_2 = -\frac{4}{3}$. Прямая AB совпадет с прямой p ,

если $\frac{3a}{2} - 5 = 6 \rightarrow a_3 = -\frac{2}{3}$, а прямая CD , если $\frac{3a}{2} - 1 = 6 \rightarrow a_4 = -\frac{10}{3}$.

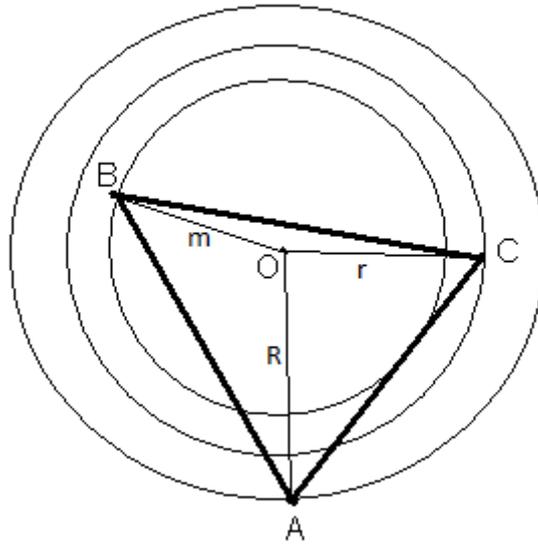
0	0	2	2	0
		$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	
				0
0	$-\frac{10}{3}$	2	2	$-\frac{2}{3}$
			0	0

На рис. указано количество решений при пересечении квадрата $ABCD$ с прямыми p и q при различных значениях параметра a .

Два решения бывает, если $a \in \left(-\frac{10}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Задача 6 Ответ: $s = \frac{25\sqrt{3} \pm 36}{4}$

Решение



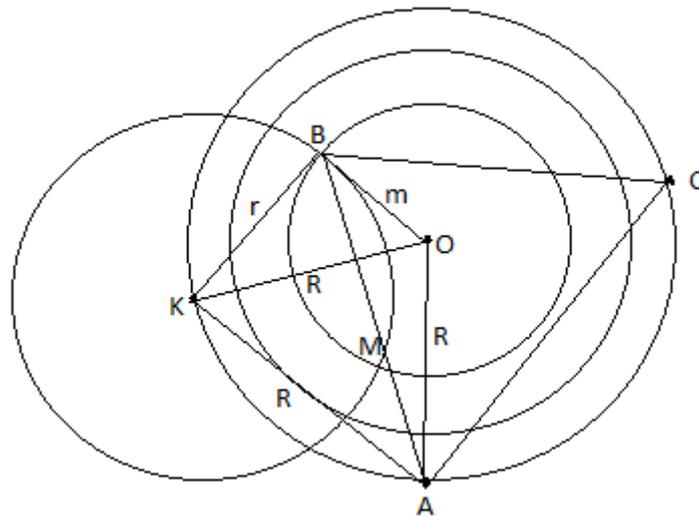
Дополнительные построения.

Повернем окружность радиуса r относительно точки A на 60° против часовой стрелки.

Тогда центр O перейдет в точку K , лежащую на окружности радиуса R . Окружность радиуса r с центром в точке K пересекает окружность радиуса m в точках B и M .

Отрезки AB или AM - стороны искомого двух треугольников.

Случай 1. Стороной треугольника является AB .



Треугольник AOK равносторонний, поэтому $OK = R$, $KB = r$, $OB = m$, угол AOK

равен 60° . Длина стороны AB в треугольнике ABO - искомая. Обозначим угол BOK через α .

Значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся из треугольника KBO по теореме косинусов, так как известны три его стороны. Условием разрешимости данной задачи является существование треугольника со сторонами R, r и m . Тогда длина AB определяется теоремой косинусов, примененной к треугольнику ABO .

$$a^2 = R^2 + m^2 - 2Rm \cos(\alpha + 60^\circ)$$

а площадь искомого треугольника $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

В условиях варианта 1 $R = 5$, $r = 4$, $m = 3$. Тогда $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

$$a^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = 25 + 12\sqrt{3}.$$

